



Frederico Cezar Gonçalves Martins de  
Barros

**Análise do Momento Resistente de  
Vigas em Concreto Reforçado com  
Fibras de Aço**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

Instituto de Tecnologia  
Programa de Pós-graduação em Engenharia  
Civil

Orientação: Dênio Ramam Carvalho de Oliveira

Coorientação: Bernardo Nunes de Moraes Neto

Universidade Federal do Pará  
Instituto de Tecnologia  
Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil



**Frederico Cezar Gonçalves Martins de Barros**

**Análise do Momento Resistente de Vigas em Concreto Reforçado  
com Fibras de Aço**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Dênio Ramam Carvalho de Oliveira  
Coorientação: Bernardo Nunes de Moraes Neto

Belém  
Agosto de 2015

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Frederico Cezar Gonçalves Martins de Barros.

TÍTULO: Análise do Momento Resistente de Vigas em Concreto Reforçado com Fibras de Aço.

GRAU: Mestre ANO: 2015

É concedida à Universidade Federal do Pará permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

**Frederico Cezar Gonçalves Martins de Barros.**

Rod. Augusto Montenegro nº 5000. Residencial Greenville, Qd-18 Cs-08. Parque Verde.  
66.635-110 Belém – PA – Brasil.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Biblioteca Central / UFPA, Belém – PA

---

Barros, Frederico Cezar Gonçalves Martins de.

Análise do Momento Resistente de Vigas em Concreto Reforçado com Fibras de Aço / Frederico Cezar Gonçalves Martins de Barros. – 2015.

Orientador: Dênio Ramam Carvalho de Oliveira.

Coorientador: Bernardo Nunes de Moraes Neto

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Belém, 2015.

1. Fibra de aço. 2. Flexão. 3. Vigas. 4. Concreto Reforçado com Fibra de Aço

CDD - XX. ed. XXX.XXXXX

---

Universidade Federal do Pará  
Instituto de Tecnologia  
Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil



**Frederico Cezar Gonçalves Martins de Barros**

**Análise do Momento Resistente de Vigas em Concreto Reforçado  
com Fibras de Aço**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFPA. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Dênio Ramam Carvalho de Oliveira**  
Orientador  
Universidade Federal do Pará

**Prof. Alcebíades Negrão Macêdo**  
Examinador Interno  
Universidade Federal do Pará

**Prof. José Neres da Silva Filho**  
Examinador Externo  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Belém, 20 de agosto de 2015.

## **Agradecimentos**

Agradeço inicialmente ao Professor Dênio Ramam Carvalho Oliveira pelo auxílio e apoio incondicional em todos os momentos. Ao Professor Bernardo Nunes de Moraes Neto pelo incessante suporte no decorrer da jornada que resultou nesta dissertação. Ao Professor Cláudio Blanco e toda direção do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Ao CNPq e CAPES por viabilizar a realização desse mestrado. A todos os técnicos e funcionários do Laboratório de Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará, com destaque especial para Dona Marly. A todos os amigos do GAEMA, cuja amizade e companheirismo levarei comigo para sempre. E por último, mas não menos importante, a minha família e Angélica, pelas sextas e sábados perdidos e o suporte nas horas difíceis.

## RESUMO

BARROS, F. C. G. M. B. (2015). **Análise do Momento Resistente de Vigas em Concreto Reforçado com Fibras de Aço**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil, 132 pg.

No presente trabalho discute-se o cálculo do momento resistente último,  $M_R$ , de vigas em concreto reforçado com fibras de aço (CRFA). Para este fim, abordam-se as propostas de cinco recomendações normativas, ACI 544.4R-88 (1988), RILEM TC 162-TDF (2003), CECS 38 (2004), CEB-FIP (2010) e DAfStb (2010), e cinco modelos teóricos, LOK e PEI (1998), CHOI *et al.* (2007), SORANAKOM e MOBASCHER (2007), MAYA *et al.* (2012) e ZIJL e MBEWE (2013). A avaliação das recomendações normativas e dos modelos é estabelecida a partir de um banco de dados (BD), o qual é composto por 142 ensaios de flexão. A performance das propostas é julgada em função do parâmetro  $\chi = M_{exp}/M_{teo}$ , o qual define a razão entre os momentos resistentes experimentais (BD) e teóricos. Ressalta-se que o parâmetro  $\chi$  é avaliado em termos da precisão, dispersão, segurança e classificado segundo uma adaptação do *Demerit Points Classification – DPC*. Por fim, discute-se a simulação (não linear do material) da relação *momento – curvatura* com o auxílio da ferramenta computacional DOCROS (*Design Of CROSS Sections*), onde avaliam-se os principais parâmetros que influenciam no valor do momento resistente de vigas em CRFA. Dentro dos modelos de flexão analisados, o CEB-FIP (2010) apresentou a melhor performance, dado os destaques positivos no que diz respeito à precisão, à dispersão e à segurança. Entretanto, destacam-se também as propostas do RILEM TC 162-TDF (2003), do CECS 38 (2004), do SORANAKOM e MOBASCHER (2007) e do ZIJL e MBEWE (2013) que também apresentaram resultados satisfatórios.

## Palavras-chave

Concreto reforçado com fibra de aço; Fibras de aço; Vigas; Flexão.

## ABSTRACT

BARROS, F. C. G. M. B. (2015). **Analysis of Ultimate Moment of Steel Fibre Reinforced Concrete Beams**. MSc Thesis, Postgraduate Program in Civil Engineering, Institute of Technology, Federal University of Pará, Belém, Pará, Brazil, 132 pg. (in Portuguese).

In the current work, analytical formulations are discussed for predicting the ultimate moment ( $M_R$ ) of steel fiber reinforced concrete (SFRC) beams. For this propose, five design guidelines are presented, ACI 544.4R-88 (1988), RILEM TC 162-TDF (2003), CECS 38 (2004), CEB-FIP (2010) and DAfStb (2010), and five theoretical models, LOK and PEI (1998), CHOI *et al.* (2007), SORANAKOM and MOBASCHER (2007), MAYA *et al.* (2012) and ZIJL and MBEWE (2013). To assess the performance of the guidelines and models a database (DB) composed by 142 SFRC beam was collected from the scientific literature. The performance of the proposals are appraised in terms of the  $\chi = M_{exp}/M_{teo}$  parameter, where  $M_{exp}$  and  $M_{teo}$  are, respectively, the ultimate moment recorded experimentally (DB) and estimated according to the proposals. Additionally, is important to highlight that the  $\chi$  parameter is assess in terms of the level of accuracy, scatter, safety and classified according to the modified version of the *Demerit points Classifications – DPC*. Finally, the software DOCROS (*Design Of CROSS Sections*) is used to simulate (nonlinear material) the *moment-curvature* relationship and the most important parameters for predicting the ultimate moment in SFRC beams. Between all the flexure models analyzed the CEB-FIP (2010) presented the best performance when the precision, dispersion and safety are treated. Notwithstanding, the models proposed by RILEM TC 162-TDF (2003), CECS 38 (2004), SORANAKOM and MOBASCHER (2007) and ZIJL and MBEWE (2013) presented satisfactory results.

## Key-words

Steel fiber reinforced concrete; Steel fiber; Beams; Flexure.

## Sumário

Capítulos	Páginas
1. Introdução	1
1.1. Justificativa	3
1.2. Objetivos	4
2. Concreto Reforçado com Fibras de Aço	5
2.1. Considerações gerais	5
2.2. Fibras de Aço	7
2.3. Preparo do CRFA	8
2.4. Propriedades do CRFA	9
2.4.1. Resistência à Compressão	11
2.4.2. Resistência à Tração	12
2.4.3. Resistência à Flexão	13
3. Recomendações Normativas	14
3.1. ACI 544.4R-88: Design Considerations for Steel Fiber Reinforced Concrete	14
3.2. RILEM TC 162-TDF: Test and Design Methods for Steel Fibre Reinforced Concrete: $\sigma$ - $\varepsilon$ Design method	18
3.3. CECS 38:2004 – Technical Specification for Fiber Reinforced Concrete Structures	24
3.4. CEB-FIP Model Code 2010 – Final Draft	27
3.5. Deutsche Ausschuss für Stahlbeton – DAfStb Technical Rule on Steel Fibre Reinforced Concrete Draft-2010	32
3.6. Considerações Adicionais	37
4. Revisão Bibliográfica	40
4.1. Introdução	<b>Erro! Indicador não definido.</b>



4.2.	Trabalhos Experimentais Desenvolvidos	40
4.2.1.	OH (1992)	40
4.2.2.	ASHOUR <i>et al.</i> (2000)	41
4.2.3.	DANCYGIER e SAVIR (2006)	42
4.2.4.	MONTAIGNAC <i>et al.</i> (2011)	43
4.2.5.	KHALIL e TAYFUR (2013)	44
4.3.	Modelos Teóricos para o Cálculo de $M_R$	45
4.3.1.	LOK e PEI (1998)	45
4.3.2.	CHOI <i>et al.</i> (2007)	48
4.3.3.	SORANAKOM e MOBASCHER (2007)	51
4.3.4.	MAYA <i>et al.</i> (2012)	54
4.3.5.	ZIJL e MBEWE (2013)	55
5.	Análise dos Modelos de Flexão	60
5.1.	Banco de Dados (BD)	60
5.2.	Procedimento de Análise	61
5.3.	Resultados	62
5.4.	Considerações Adicionais	67
5.4.1.	Influência do volume de fibra	68
5.4.2.	Influência do fator de forma	69
5.4.3.	Influência da resistência à compressão do concreto	71
5.4.4.	Influência da taxa de armadura de flexão	72
5.4.5.	Influência da altura útil	74
6.	Análise da Relação <i>Momento-Curvatura</i>	77
6.1.	Considerações iniciais	77
6.2.	Programa experimental de BARROS e FIGUEIRAS (1999)	77
6.3.	<i>DOCROS – Design Of CROss Sections</i>	78
6.4.	Simulação das vigas	79
6.5.	Considerações adicionais	85

6.5.1.	Influência das armaduras	85
6.5.2.	Influência das resistências	88
7.	Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	93
7.1.	Conclusões	93
7.2.	Sugestões para Trabalhos Futuros	95
	Referências Bibliográficas	96
	Anexo A – Cálculo do Momento Resistente	102
	Anexo B – Banco de Dados	127

## Lista de Tabelas

<b>Tabelas</b>	<b>Páginas</b>
Tabela 2.1 – Classificação das fibras de aço segundo a NBR 15530:2007 (MORAES NETO, 2013)	8
Tabela 3.1 – Valores de $\beta_{tu}$ (CECS 38, 2004).	26
Tabela 3.2 – Valores de $\delta$ (GB 500010, 2002).	26
Tabela 3.3 – Análise de deformação $\varepsilon_{c2u}$ segundo o DIN 1045-1 (2001).	34
Tabela 4.1 - Vigas ensaiadas por OH (1992).	40
Tabela 4.2 - Vigas ensaiadas por ASHOUR <i>et al.</i> (2000).	41
Tabela 4.3 - Vigas ensaiadas por DANCYGIER e SAVIR (2006).	43
Tabela 4.4 - Vigas ensaiadas por MONTAIGNAC <i>et al.</i> (2011).	44
Tabela 4.5 - Vigas ensaiadas por KHALIEL e TAYFUR (2013).	45
Tabela 5.1 – Resumo do BD.	60
Tabela 5.2 – Classificação de $\chi$ segundo a versão modificada do DPC.	62
Tabela 5.3 – Classificação de $\chi$ segundo a versão modificada do DPC.	65
Tabela 6.1 – Vigas ensaiadas por BARROS e FIGUEIRAS (1999).	77
Tabela 6.2 – Camadas das seções das vigas de BARROS e FIGUEIRAS (1999).	80
Tabela 6.3 – Lei constitutiva adotada para o CRFA.	81
Tabela 6.4 – Deformações do concreto comprimido segundo o CEB-FIP (2010).	81
Tabela B.1.1 - Banco de dados (BD).	127

## Lista de Figuras

<b>Figuras</b>	<b>Páginas</b>
Figura 1.1 – Distribuição das tensões em uma viga flexionada.	2
Figura 2.1 – Influência do módulo de elasticidade das fibras na relação <i>tensão-deformação</i> elástica do compósito (FIGUEIREDO, 2000).	6
Figura 2.2 – Fibras de aço em pentes.	9
Figura 2.3 – Redistribuição das tensões no plano de uma fissura.	10
Figura 2.4 – Compatibilização entre a fibra e o agregado (FIGUEIREDO, 2000).	11
Figura 2.5 – Gráfico <i>tensão-deformação</i> para concretos com fibra e sem fibras (CEB-FIP, 2010).	12
Figura 2.6 – Comportamento do CRFA à tração direta segundo o CEB-FIP (2010) (MORAES NETO, 2013).	13
Figura 2.7 – Relação <i>carga x deslocamento</i> para avaliar o CRFA flexionado.	13
Figura 3.1 – Modelo de flexão proposto pelo ACI 544.4R-88.	15
Figura 3.2 – Fluxograma do cálculo segundo o ACI 544.4R-88.	17
Figura 3.3 – Relação <i>tensão-deformação</i> no CRFA segundo o RILEM TC 162-TDF (2003).	18
Figura 3.4 – Lei constitutiva do CRFA comprimido (adaptado do CEB-FIP, 2010).	19
Figura 3.5 – Lei constitutiva do CRFA tracionado (RILEM TC 162-TDF, 2003).	19
Figura 3.6 – Valores do fator de forma $k_f$ .	21
Figura 3.7 – Ensaio de flexão (adaptado RILEM TC 162-TDF, 2002).	21
Figura 3.8 – Relação <i>carga-deslocamento</i> (adaptado RILEM TC 162-TDF, 2002).	22
Figura 3.9 – Modelo de flexão proposto pelo RILEM TC 162-TDF (2003).	23
Figura 3.10 – Cálculo de $M_R$ segundo o RILEM TC 162-TDF (2003).	24
Figura 3.11 – Modelo de flexão segundo o CECS 38 (2004).	25
Figura 3.12 – Fluxograma do cálculo segundo o CECS 38 (2004).	27

Figura 3.13 – Deformações e tensões numa seção transversal segundo o CEB-FIP (2010).	
28	
Figura 3.14 – Leis constitutivas para o CRFA fissurado (CEB-FIP, 2010).	29
Figura 3.15 – Relação <i>carga x CMOD</i> típica (CEB-FIP, 2010).	30
Figura 3.16 – Cálculo de $M_R$ segundo o CEB-FIP (2010).	32
Figura 3.17 – Modelo de flexão proposto pelo DAfStb (2010).	33
Figura 3.18 – Distribuição das tensões no concreto comprimido segundo DIN 1045-1 (2001).	33
Figura 3.19 – Distribuição das tensões no concreto tracionado segundo o DAfStb (2010).	35
Figura 3.20 – Ensaio de flexão proposto pela DAfStb (2010).	36
Figura 3.21 – Curva <i>carga-deslocamento</i> típica para o ensaio de flexão da figura 3.20 (adaptada DAfStb, 2010).	36
Figura 3.22 – Cálculo de $M_R$ segundo o DAfStb (2010).	37
Figura 3.23 – Relação $\sigma$ - $\epsilon$ do aço das armaduras de flexão.	38
Figura 4.1 – Modelo de flexão proposto por LOK e PEI (1998).	46
Figura 4.2 – Relação <i>tensão x deformação</i> do CRFA comprimido (LOK e PEI, 1998).	47
Figura 4.3 – Relação <i>tensão x deformação</i> do CRFA tracionado (LOK e PEI, 1998).	47
Figura 4.4 – Modelo de flexão proposto por CHOI <i>et al.</i> (2007).	49
Figura 4.5 – Relação <i>tensão-deformação</i> do CRFA comprimido (CHOI <i>et al.</i> , 2007).	50
Figura 4.6 – Relação <i>tensão-deformação</i> do CRFA tracionado (CHOI <i>et al.</i> , 2007).	51
Figura 4.7 – Relação <i>tensão-deformação</i> do CRFA tracionado (LIM <i>et al.</i> , 1987).	53
Figura 4.8 – Modelo de flexão proposto por SORANAKOM e MOBASCHER (2007).	53
Figura 4.9 – Modelo de flexão proposto por MAYA <i>et al.</i> (2012).	55
Figura 4.10 – Modelo de flexão proposto por ZIJL e MBEWE (2013).	57
Figura 4.11 – Bloco de compressão proposto por ZIJL e MBEWE (2013).	57
Figura 4.12 – Bloco de tração proposto por ZIJL e MBEWE (2013).	58
Figura 5.1 – Análise da precisão dos modelos.	63

Figura 5.2 – Análise quanto à precisão.	64
Figura 5.3 – Análise quanto a quantidade de vigas que apresentam $\chi \geq 1$ e $\chi < 1$ .	65
Figura 5.4 – Influência do volume de fibra.	68
Figura 5.5 – Influência do fator de forma.	70
Figura 5.6 – Influência da resistência à compressão do concreto.	71
Figura 5.7 – Influência da taxa de armadura de flexão.	73
Figura 5.8 – Influência da altura útil.	74
Figura 6.1 – Relação <i>momento-curvatura</i> das vigas de BARROS e FIGUEIRAS (1999).	78
Figura 6.2 – Discretização de uma seção transversal no DOCROS (VARMA, 2012).	79
Figura 6.3 – Discretização da seção transversal das vigas de BARROS e FIGUEIRAS (1999).	80
Figura 6.4 – Lei constitutiva do concreto (CEB-FIP, 2010).	80
Figura 6.5 – Lei constitutiva adotada para o concreto tracionado.	81
Figura 6.6 – Lei constitutiva do aço das armaduras.	83
Figura 6.7 – Simulação da realação $M-\Phi$ das vigas de BARROS e FIGUIRAS (1999).	84
Figura 6.8 – Simulação da influência da taxa de armadura tracionada.	86
Figura 6.9 – Discretização da seção transversal	87
Figura 6.10 – Simulação da influência da taxa de armadura comprimida.	88
Figura 6.11 – Simulação da influência da resistência à tração do concreto.	89
Figura 6.12 – Simulação da influência da resistência à compressão do concreto.	91
Figura A.1.1 – Modelo de flexão proposto pelo ACI 544.4R-88.	102
Figura A.2.1 – Modelo de flexão proposto pelo RILEM TC 162-TDF (2003).	104
Figura A.3.1 – Modelo de flexão segundo o CECS 38 (2004).	108
Figura A.4.1 – Deformações e tensões numa seção transversal segundo o CEB-FIP (2010).	
110	
Figura A.5.1 – Modelo de flexão proposto pelo DAfStb (2010).	112
Figura A.6.1 – Modelo de flexão proposto por LOK e PEI (1998).	114

Figura A.7.1 – Modelo de flexão proposto por CHOI <i>et al.</i> (2007).	117
Figura A.8.1 – Modelo de flexão proposto por SORANAKOM e MOBASCHER (2007).	119
Figura A.9.1 – Modelo de flexão proposto por MAYA <i>et al.</i> (2012).	122
Figura A.10.1 – Modelo de flexão proposto por ZIJL e MBEWE (2013).	124

## Lista de Símbolos

Neste item são apresentados os principais símbolos utilizados nesta tese. Aqueles que não estão aqui apresentados têm seus significados explicados assim que mencionado no texto.

<b>Símbolos</b>	<b>Significado</b>
$b$	base da viga
$c$	cobrimento da armadura
$d$	altura útil da viga
$d_f$	diâmetro da fibra
$E_{c1}$	módulo de elasticidade secante do concreto
$E_{ci}$	módulo de elasticidade tangente do concreto
$E_s$	módulo de elasticidade do aço
$f_c$	resistência a compressão do concreto
$F_c$	resultante dos esforços gerados pelo concreto sobre compressão
$f_{Ftu}$	resistência última à tração do CRFA
$f_{Fts}$	resistência de serviço do CRFA
$F_s$	resultante dos esforços gerados pela armadura principal
$F_s'$	resultante dos esforços gerados pela armadura de compressão
$f_t$	resistência á tração direta do CRFA sobre tração
$F_t$	resultante dos esforços gerados pelo CRFA sobre tração
$f_y$	tensão de escoamento do aço
$h$	altura da viga
$k$	razão entre altura útil e altura da viga
$l$	vão da viga
$l_f$	comprimento da fibra



$M_R$	momento resistente da seção transversal sobre esforços de flexão
$\phi$	diâmetro da barra de aço
$V_f$	taxa volumétrica de fibra
$V_m$	taxa volumétrica da matriz
$w_u$	abertura máxima da fissura
$x$	distância da linha neutra ao topo da seção comprimida na viga
$y_c$	distância da linha neutra da seção até a resultante do concreto
$y_s$	distância da linha neutra da seção até a resultante da armadura principal
$y_s'$	distância da linha neutra da seção até a resultante da armadura de compressão
$y_t$	distância da linha neutra da seção até a resultante do CRFA sobre tração
$\Delta$	grandeza que indica a o cobrimento adotado da armadura principal
$\Delta'$	grandeza que indica a o cobrimento adotado da armadura de compressão
$\epsilon_{cu}$	deformação máxima de compressão no concreto
$\epsilon_{cu}$	deformação última no concreto à compressão
$\epsilon_{cy}$	deformação de plastificação do concreto sobre compressão
$\epsilon_{Fu}$	deformação de ruptura do CRFA sobre de tração
$\epsilon_s$	deformação no aço
$\epsilon_y$	deformação de escoamento no aço
$\rho$	taxa de armadura longitudinal principal
$\rho'$	taxa de armadura longitudinal de compressão

## 1. Introdução

O concreto é o material mais empregado na construção civil pois possui a menor relação custo/resistência quando comparado a outros materiais disponíveis no mercado. O baixo custo está associado a diversos fatores, entre esses se salienta a facilidade de moldar formas diversificadas e não exigir mão-de-obra especializada no momento do seu preparo. Apesar dos avanços alcançados no campo da tecnologia do concreto, esforços ainda são necessários para aprimorar propriedades deficientes do concreto.

Entre as deficiências do concreto, salienta-se a baixa resistência aos esforços de tração, comparativamente à resistência à compressão. Além da resistência, é de se ressaltar o comportamento frágil desse material, apresentando pouca ou nenhuma ductilidade após a sua fissuração. Esse comportamento torna a aplicabilidade do concreto relativamente restrita, pois o mesmo não apresenta grandes deformações antes de romper, ou seja, o concreto não apresenta indícios prévios de que está próximo de sua ruptura. Para suprir essas deficiências, baixa resistência à tração e comportamento frágil, barras de aço são incorporadas ao concreto, dando origem ao conceito de concreto armado.

Avanços recentes mostram que a adição de fibras à massa de concreto está sendo uma alternativa de reforço às barras de aço do concreto armado. Segundo BELLO (2014), o reforço com fibras foi impulsionado por pesquisas realizadas no final dos anos 50 e início dos anos 60 por iniciativa de RAMOULDI e BASTON (1963) e RAMOULDI e MANDEL (1964), sendo de realçar a aplicação de fibras de aço. Entretanto, a comercialização das fibras atingiu o ápice na década de 70, particularmente na Europa, Japão e Estados Unidos.

Na década de 90, OH (1992) já apontava o futuro promissor da aplicação do concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) na indústria da construção civil. Conforme relata KANG *et al.* (2012), o CRFA continua destacando-se entre os diferentes materiais estudados para a indústria da construção civil.

Segundo MORAES NETO (2013), as propriedades do concreto mais beneficiadas pelas fibras de aço são a capacidade de absorção de energia, a ductilidade, o controle da fissuração e a resistência às ações dinâmicas, de fadiga e de impacto. Conforme relata FIGUEIREDO (2000), a fragilidade típica do concreto é aprimorada pelas fibras, caracterizando o CRFA com um material dúctil.

No que diz respeito às tensões normais da viga flexionada mostrada na figura 1.1 (a), é conhecido que a borda superior é comprimida e que a borda inferior é tracionada. Neste contexto, a figura 1.1 (b) apresenta a distribuição das tensões na seção transversal de uma viga de concreto simples não fissurada, a figura 1.1 (c) apresenta a distribuição das tensões na seção de uma viga em concreto armado e por fim, a figura 1.1 (d) apresenta a distribuição das tensões na seção de uma viga em CRFA.

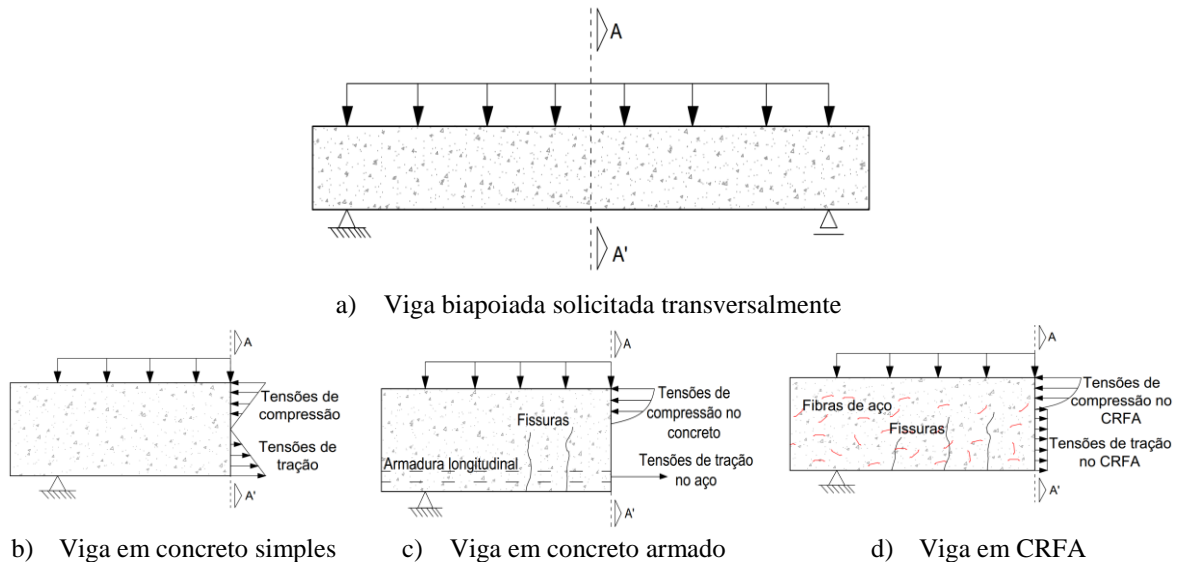


Figura 1.1 – Distribuição das tensões em uma viga flexionada.

Com base na figura 1.1, verifica-se admissível assumir que a viga em concreto simples, figura 1.1 (b), apresente comportamento linear elástico, distribuição linear das tensões, até o surgimento das primeiras fissuras na região tracionada da peça. Dada a baixa resistência à tração desse material, a viga em concreto simples colapsa, de maneira brusca e frágil, praticamente após o surgimento destas primeiras fissuras (carga de ruptura baixa). Diferentemente da viga em concreto simples, na viga em concreto armado, figura 1.1 (c), o mecanismo de reforço proporcionado pelas armaduras permite, entre vários aspectos, a redistribuição das tensões na região comprimida da viga (distribuição parábola-retângulo), o acréscimo da capacidade portante (carga de ruína elevada, comparativamente à viga em concreto simples), incorporar ductilidade no comportamento da viga (alteração no modo de ruína da viga). Apesar das vantagens, na viga em concreto armado é desconsiderada a contribuição do concreto tracionado na resistência da viga, sendo considerada apenas a contribuição das armaduras. Por fim, na viga em CRFA, figura 1.1 (d), a interação das fibras com o concreto permite a redistribuição das tensões na região comprimida e tracionada da viga, acréscimo da capacidade portante (comparativamente à viga em

concreto simples), incorporar ductilidade ao comportamento da viga (podendo, inclusive, ser superior à viga em concreto armado) e considerar a contribuição do concreto tracionado na resistência da peça.

Entre as vantagens do CRFA, é importante mencionar que a possibilidade de substituir parte, ou todo o reforço convencional do concreto armado (barras de aço) pelo reforço das fibras de aço é a vantagem que veem despertando o interesse dos pesquisadores. LOPES (2005) mostrou que a adição de  $150 \text{ kg/m}^3$  (2,0%) de fibra de aço na massa de concreto possibilitou a redução de 50% da armadura de flexão da viga de referência (sem fibras), mantendo ainda a mesma capacidade portante. MONTAIGNAC *et al.* (2011) complementa afirmando que a utilização do CRFA, além de permitir a redução, ou eliminação, da armadura convencional, também pode garantir melhores condições de segurança estrutural.

De acordo com MANSUR *et al.* (1986), as fibras de aço também podem ser utilizadas para melhorar as propriedades dos elementos estruturais em concreto armado (com armadura convencional), tais como: resistência, rigidez, ductilidade, integridade estrutural após ser alcançada a carga última correspondente ao elemento em concreto armado e outras. A utilização de fibras de aço é uma opção viável para controlar a taxa de armadura em uma estrutura de concreto armado, tendo em vista que as fibras proporcionam elevada tenacidade e viabilizam a contribuição do concreto tracionado na avaliação da resistência do elemento estrutural em análise. Além das considerações apresentadas, segundo MORAES NETO (2013), o CRFA também pode aprimorar significativamente o caráter frágil do concreto de alta resistência, a performance de estruturas solicitadas ciclicamente ou sujeitas à fadiga, e o desempenho das estruturas no estado limite de serviço (controle da fissuração).

### **1.1. Justificativa**

A tecnologia do CRFA está evoluindo exponencialmente, onde pesquisas discutem constantemente as vantagens e desvantagens do material, o comportamento do CRFA no estado fresco e endurecido, a aplicabilidade quase ilimitada do material, as propriedades mecânicas e reológicas do CRFA, os métodos de preparo, os ensaios de caracterização, o comportamento pós-fissurado, entre outros aspectos. Entretanto, para que o CRFA seja competitivo no mercado da construção civil é necessário que as considerações de projeto acompanhem a evolução dessa tecnologia, pois somente assim o material pode ser aplicado

com segurança e racionalidade nas diferentes etapas da construção civil. Nesse contexto, aborda-se neste trabalho a determinação do momento resistente  $M_R$  de vigas em CRFA com seção transversal retangular e reforçada com armaduras na zona tracionada e comprimida. Dessa forma, pretende-se contribuir ao estudo do CRFA, principalmente no que diz respeito à análise de vigas flexionadas no estado limite último.

## 1.2. Objetivos

O presente trabalho teve como objetivo avaliar metodologias para estimar o momento resistente  $M_R$  de vigas em concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), verificando inclusive a precisão dos resultados obtidos. Assim, são apresentadas comparações e discussões visando contribuir para o estudo do CRFA, principalmente no que diz respeito à análise de vigas flexionadas. Para este fim, pretende-se debater:

- A teoria do CRFA;
- A proposta de cinco recomendações normativas referentes à determinação de  $M_R$  de vigas em CRFA, a saber: ACI 544.4R-88 (1988), RILEM TC 162-TDF (2003), CECS 38 (2004), CEB-FIP (2010) e DAfStb (2010);
- A formulação de cinco modelos destinados ao cálculo de  $M_R$ , a saber: LOK e PEI (1998), CHOI *et al.* (2007), SORANAKOM e MOBASCHER (2007), MAYA *et al.* (2012) e ZIJL e MBEWE (2013);
- Um banco de dados atualizado e consistente, que servirá de referência para avaliar a performance das recomendações normativas e dos modelos;
- A simulação (não linear do material) da relação *momento-curvatura*, onde serão avaliados os principais parâmetros que influenciam na determinação de  $M_R$ . Nessa análise será utilizado como ferramenta computacional o *software* DOCROS (*Design Of CROSS Sections*).

## 2. Concreto Reforçado com Fibras de Aço

### 2.1. Considerações gerais

Materiais compósitos são uma constante ao longo da construção civil desde quando esta nem era referida como uma área de conhecimento específico, remetendo às estruturas primitivas que utilizavam tijolos feitos à base de colmo e lama até o atual concreto armado. Por definição, materiais compósitos são compostos por dois ou mais elementos imiscíveis entre si, constituídos por matriz e reforço. No caso do concreto reforçado com fibras de aço (CFRA), o concreto comporta-se como a matriz e as fibras como reforço.

No tocante às fibras, diversos materiais são utilizados como fibras, as quais melhoram o comportamento do concreto, tais como: aço, vidro, polipropileno, nylon, polietileno e até mesmo os materiais orgânicos como fibras de sisal, casca de coco e celulose, como foi pontuado por FIGUEIREDO (2000). Ainda com relação às fibras, FIGUEIREDO (2000) complementa afirmando que o tipo de fibra utilizado no concreto influencia diretamente no comportamento final do concreto reforçado com fibras. Para exemplificar este aspecto, a figura 2.1 ilustra a influência do módulo de elasticidade das fibras na relação *tensão-deformação* ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) elástica, comparativamente à relação da matriz de concreto. Nessa figura, a curva da matriz é representada por *O-A*, enquanto as linhas *O-B* e *O-D* representam o comportamento elástico de fibras com alto e baixo módulo de elasticidade, respectivamente. No caso de fibras com baixo módulo, quando ocorre a ruptura da matriz (ponto *A*) ocorre à transferência de tensões desta para as fibras (ponto *C*), que ainda apresenta um baixo nível de tensão para este nível de deformação, devendo ser muito mais intensamente deformada, até o ponto *D*, para garantir o mesmo nível de tensão de ruptura da matriz. Logo, uma fibra com baixo módulo não oferece uma capacidade satisfatória de reforço e acaba permitindo um grande nível de deformação (ponto *D*) e fissuração no compósito. Isso, partindo do pressuposto que a fibra com baixo módulo tenha resistência mecânica o suficiente para resistir a tal nível de tensão (pouco provável na prática). Por outro lado, a fibra com alto módulo de elasticidade apresenta um alto nível de tensão (ponto *B*) para as deformações de ruptura da matriz (ponto *A*), o que permitirá a fibra atuar como reforço imediatamente após a ruptura da matriz sem causar grandes deformações no compósito.

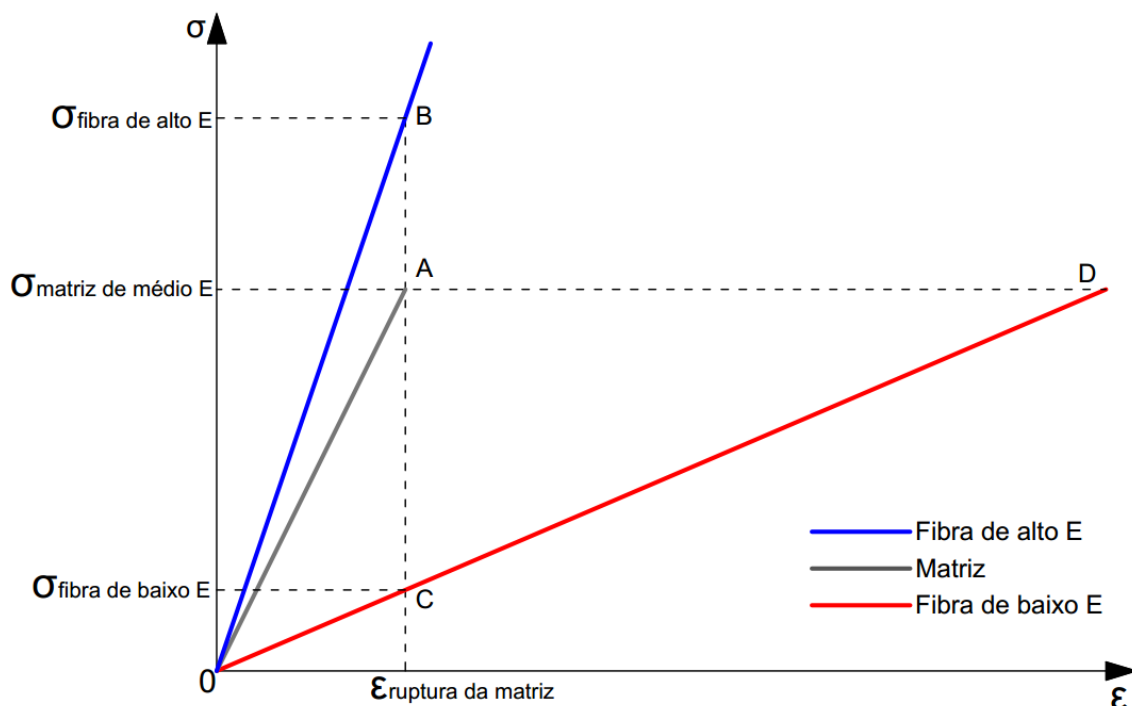


Figura 2.1 – Influência do módulo de elasticidade das fibras na relação *tensão-deformação* elástica do compósito (FIGUEIREDO, 2000).

Com base na figura 2.1, fibras com baixo módulo de elasticidade, se comparado com o módulo da matriz, não são indicadas para reforço no concreto. A maioria das fibras com baixo módulo de elasticidade como a de nylon e polietileno tem sido destinadas basicamente para controle de fissuração por retração restringida que ocorre normalmente durante a hidratação inicial do concreto.

Fibras como alto módulo de elasticidade, como as fibras de aço, atuam diretamente como reforço primário no concreto, melhorando diretamente suas propriedades, conforme se discute a seguir. Segundo FIGUEIREDO (2000) a adição de fibras de aço no concreto minimiza o seu comportamento frágil típico e faz com que o concreto passe a se comportar como um material pseudo-dúctil, ou seja, o concreto apresenta resistência residual após sua fissuração. Por conseguinte, aumentando consideravelmente sua tenacidade e ductilidade.

Segundo NAAMAN (1985), o ponto zero para o que veio futuramente a ser chamado de concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), se deu na Califórnia em 1874, quando A. Bernard patenteou a ideia de reforçar o concreto com lascas de aço. Porém, a tecnologia atualmente utilizada é relativamente recente e ultimamente vem adquirindo cada vez mais relevância e destaque na literatura técnica.

No que diz respeito à aplicabilidade, o concreto reforçado com fibra de aço (CRFA) vem sendo amplamente utilizado em revestimento de suporte de tuneis e minas, lajes e pisos (principalmente nas lajes de fábricas com grandes carregamentos móveis), estabilização de tapumes, isoladores sísmicos, construção de barragens, revestimento de proteção contra incêndio, reabilitação de aquedutos, reparo de estruturas marinhas, tubos de concreto de seção circular para águas pluviais e esgotos sanitários, entre outras utilizações.

## 2.2. Fibras de Aço

Segundo o ACI 544.4R-88 as fibras de aço possui formatos diversos, podendo ser lisas ou curvadas e assumir seções transversais circulares, retangulares, semicirculares ou irregulares. Seus comprimentos ( $l_f$ ) comumente utilizados oscilam entre 6,4 e 76 mm.

Os dois parâmetros mais efetivos para avaliar o comportamento da fibra de aço no compósito são: o fator de forma e volume de fibras utilizado ( $V_f$ ). O fator de forma é o resultado da razão entre o comprimento da fibra ( $l_f$ ) pelo seu diâmetro ( $d_f$ ),  $l_f/d_f$ . Esse parâmetro possui influência direta no comportamento do CRFA, tanto no estado fresco quanto no endurecido. De acordo com o ACI 544.1R-96, os fatores de forma mais utilizados ficam por volta de 20 e 100. No tocante ao volume de fibras ( $V_f$ ), essa grandeza indica a quantidade de fibra utilizada numa mistura por unidade de volume, massa ou massa por volume da mistura.

A NBR 15530:2007, a primeira norma brasileira a tratar diretamente das fibras de aço, visa padronizar as fibras produzidas no Brasil definindo as resistências limites à tração, fatores de forma mínimos (ver tabela 2.1) e subdivide as fibras de aço em três grupos, segundo sua conformação geométrica:

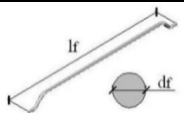
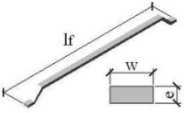
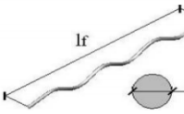
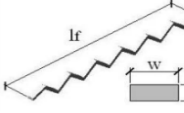
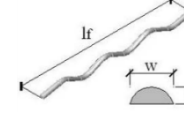
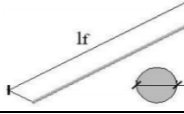
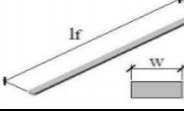
- Tipo A: fibras de aço com ancoragem nas extremidades, também chamadas de *hooked end*;
- Tipo C: fibras de aço corrugada, conhecida internacionalmente como *crimped*;
- Tipo R: fibras de aço retas ou lisas;

No tocante ao processo que deu origem ao aço utilizado nas fibras, a NBR 15530:2007 apresenta a seguinte classificação:



- Classe I: oriunda de arame trefilado a frio;
- Classe II: oriunda de chapa laminada cortada a frio;
- Classe III: oriunda de arame trefilado e escarificado.

Tabela 2.1 – Classificação das fibras de aço segundo a NBR 15530:2007 (MORAES NETO, 2013)

Tipo	Classe	Geometria	Fator de forma mínimo	Limite de resistência à tração (MPa)
A	I		40	1000
	II		30	500
C	I		40	800
	II		30	500
	III		30	800
B	I		40	1000
	II		30	500

### 2.3. Preparo do CRFA

O ACI 544.4R-88 pontua que o método de preparo do CRFA não difere do concreto convencional, porém, a dosagem deve visar a trabalhabilidade adequada da mistura. Para isso, pode-se controlar o diâmetro dos agregados, a granulometria da mistura, o teor de finos e a utilização de aditivos. A perda de trabalhabilidade do CRFA é explicada por FIGUEIREDO (2000) pelo aumento de área superficial da mistura pela inclusão das fibras, requerendo uma demanda de água de molhagem maior. Assim, uma menor quantidade de

água é disponível para fluidificar a mistura. De um modo geral, quanto maior o fator de forma da fibra maior é o impacto dessa na perda de trabalhabilidade do concreto fresco.

O preparo inadequado do concreto com fibras pode ocasionar a formação de ouriços, os quais são aglomerações de fibras na massa de concreto, que causam impacto negativo na homogeneidade de sua distribuição ao longo da mistura e favorecem a formação dos porosos, que tornam o concreto frágil. Para evitar essas aglomerações, é comum utilizar fibras coladas em pentes, como mostra a figura 2.2. Após a imersão das fibras no concreto a ligação do pente é desfeita, o risco de aglomeração é reduzido e a homogeneidade da mistura é aprimorada.

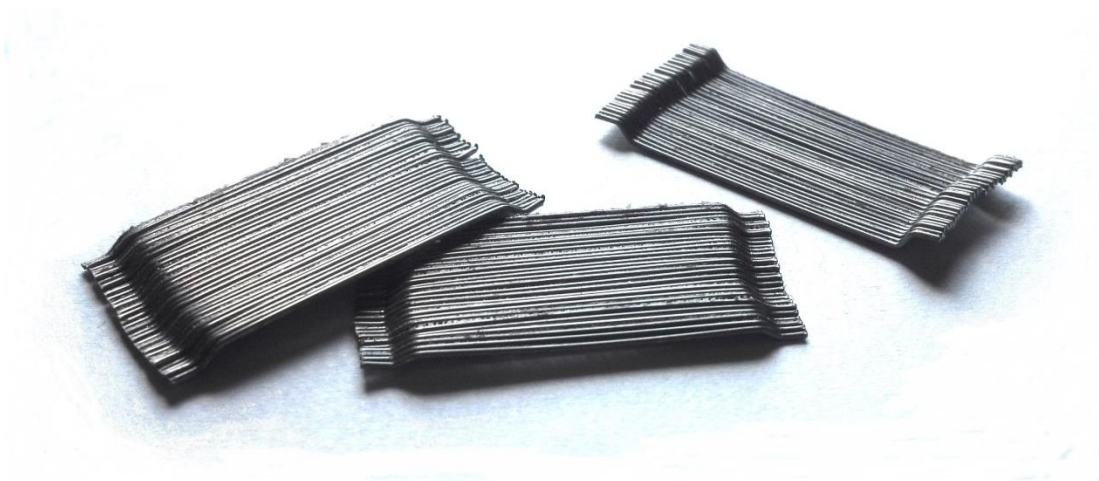


Figura 2.2 – Fibras de aço em pentes.

No tocante à avaliação da trabalhabilidade, salientam-se três métodos distintos, o abatimento do tronco de cone, *Slump Test*, cuja metodologia pode ser consultada na NBR NM 67 (1998), o ensaio do cone invertido (sob vibração), *Inverted Slump-Cone Time*, regulamentada pela ASTM C995 (2008) e por fim, *Vebe Test* (sob vibração), regulamentada pela BS 1881: Part 104 (1983). De qualquer forma, é importante destacar que o ACI 544.1R-96 relata que o *Slump Test* não é apropriado para medir a trabalhabilidade do CRFA, visto que a consistência do CRFA é diferente do concreto simples.

#### **2.4. Propriedades do CRFA**

Conforme apresenta o ACI 544.1R-96, a utilização de fibras de aço melhora consideravelmente algumas propriedades do concreto, sendo de realçar, comparativamente

ao concreto simples, a maior tenacidade (absorção de energia após a fissuração), maior resistência a impactos, abrasão e fadiga. Entre os fatores que influenciam as propriedades mecânicas do CRFA, o ACI 544.4R-88 pontua o tipo de fibra, fator de forma, volume de fibras, resistência do concreto e a dimensão do agregado graúdo.

Além das considerações anteriores, um aspecto importante que diferencia o CRFA do concreto simples é a redistribuição das tensões no plano de uma fissura, ver figura 2.3. No concreto simples, ver figura 2.3 (a), a fissura se apresenta como uma barreira à propagação das tensões, ocasionando uma concentração de tensões na extremidade da fissura, a qual contribui sobremaneira para a sua abertura descontrolada e ao modo de ruína brusco e frágil após a formação das primeiras fissuras. Diferentemente do concreto simples, no CRFA, ver figura 2.3 (b), as fibras atuam como pontes de transferência de tensões no plano da fissura, impedindo a sua propagação, proporcionando ductilidade ao material e incorporando resistência residual após a fissuração (alteração no modo de ruína).

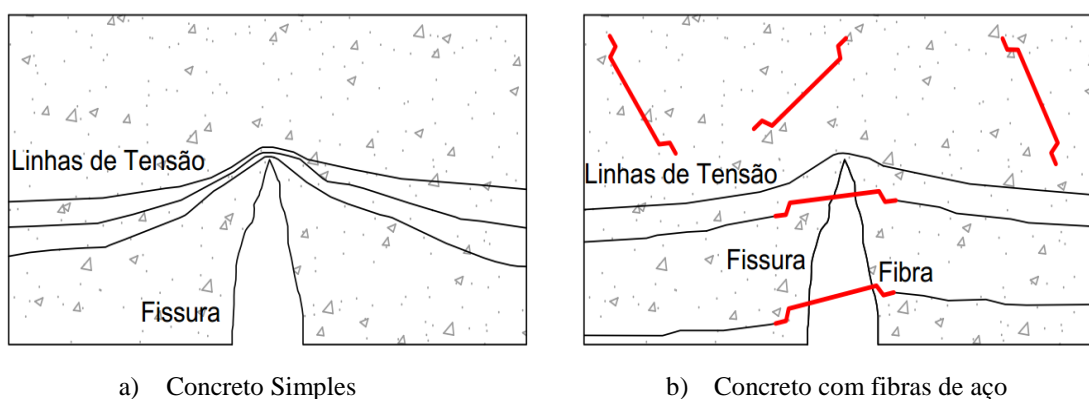
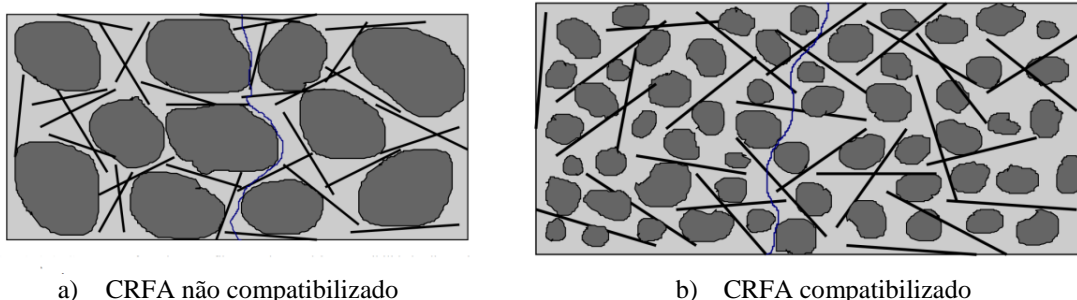


Figura 2.3 – Redistribuição das tensões no plano de uma fissura.

Adicionalmente, MORAES NETO (2013) pontua que a eficácia das fibras em melhorar as propriedades mecânicas da matriz de concreto pode ser atribuída principalmente aos mecanismos responsáveis pela transferência das tensões entre a fibra e o concreto pelo efeito de “costura” gerado pelas fibras.

Para que as fibras desempenhem um papel de reforço efetivo, há a necessidade de garantir a compatibilidade dimensional entre os agregados e as fibras, conforme comenta FIGUEIREDO (2000). Para este propósito, o referido autor sugere que o comprimento das fibras seja no mínimo o dobro da dimensão máxima característica do agregado graúdo.

Dessa forma, a disposição das fibras na massa de concreto (entre os agregados), ver figura 2.4, é favorecida, garantindo um melhor desempenho do efeito de “costura”.



a) CRFA não compatibilizado

b) CRFA compatibilizado

Figura 2.4 – Compatibilização entre a fibra e o agregado (FIGUEIREDO, 2000).

No que diz respeito ao efeito de “costura”, FIGUEIREDO (2005) adverte que a aderência das fibras na massa de concreto, aderência interfacial fibra-concreto, a qual é influenciada principalmente pelo comprimento das fibras, pelo fator de forma e pela resistência à compressão do concreto, deve ser tratada cautelosamente. Na prática, quando a aderência interfacial é bastante elevada verifica-se que ocorre a ruptura quase que concomitante das fibras e do concreto, ocasionando um pico de resistência elevado (concreto mais resistente) e o comprometimento da ductilidade e da resistência residual (ruptura brusca). Diferentemente do caso anterior, quando a aderência interfacial é inadequada, verifica-se o escorregamento (*pull-out*) prematuro das fibras da massa de concreto, comprometendo drasticamente os benefícios proporcionados pelas fibras. O ideal, o que se toma como desafio, é estabelecer uma condição intermediária, onde a aderência interfacial proporcionasse o deslizamento das fibras com ganhos de resistência moderados e sem comprometer a ductilidade e os benefícios oriundos da resistência residual.

#### 2.4.1. Resistência à Compressão

O CEB-FIP (2010) afirma que o CRFA não adquire resistência adicional à compressão se comparado ao concreto convencional, mas apresenta ganhos significativos quanto à tenacidade e à absorção de energia, como ilustra a figura 2.5. Diferente do CEB-FIP, o ACI 544.1R-96 afirma que a resistência do concreto à compressão ( $f_c$ ) pode sofrer um acréscimo, na ordem de até 15% para volumes de fibras superiores a 1,5% ( $\approx 113 \text{ kg/m}^3$ ).

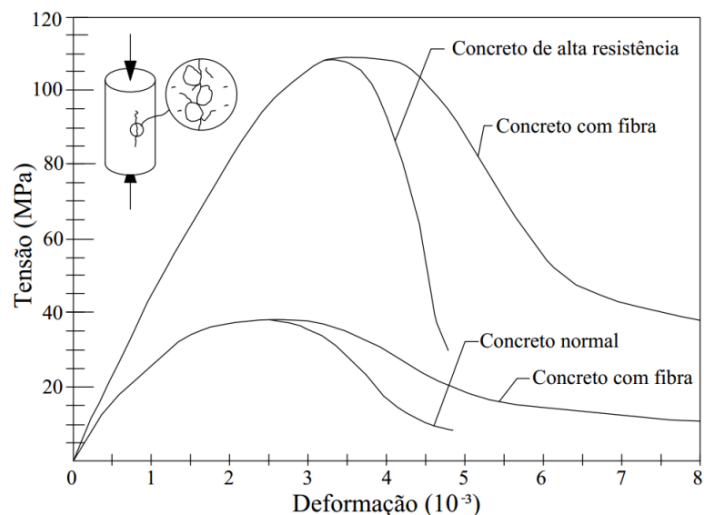


Figura 2.5 – Gráfico *tensão-deformação* para concretos com fibra e sem fibras (CEB-FIP, 2010).

Contradizendo, FIGUEIREDO (2000) pontua que a adição de fibras não objetiva aumentar a resistência à compressão e que em algumas situações é possível constatar a redução da resistência devido à má compactação do material devido a falhas na sua dosagem. No que diz respeito ao ganho de resistência à compressão do CRFA, o autor argumenta que as fibras trabalham como pontes de transferência de tensões mesmo sendo solicitadas à tração ou cisalhamento, esforços preponderantes na falha do material à compressão.

#### 2.4.2. Resistência à Tração

O ACI 544.1R-96 comenta que as fibras proporcionam acréscimos significativos na resistência à tração direta, sendo informados acréscimos de 30% a 40% para concretos com volumes de fibras superiores a 1,5%. Contrariando a afirmação anterior, o ACI 544.4R-88 relata que a resistência à tração direta do CRFA é equivalente à do concreto simples.

Nesse contexto, o CEB-FIP (2010) considera dois padrões de comportamentos para o CRFA solicitado à tração uniaxial, comportamento: *softening* e *hardening*. O primeiro, *softening*, também referido como amolecimento, é caracterizado pela perda de capacidade resistiva do material após o aparecimento da primeira fissura, figura 2.6 (a). O segundo, *hardening*, demonstra um ganho de resistência após sua fissuração e, devido a seu ganho adicional de resistência, ocorre o aparecimento de múltiplas fissuras no material, figura 2.6 (b).

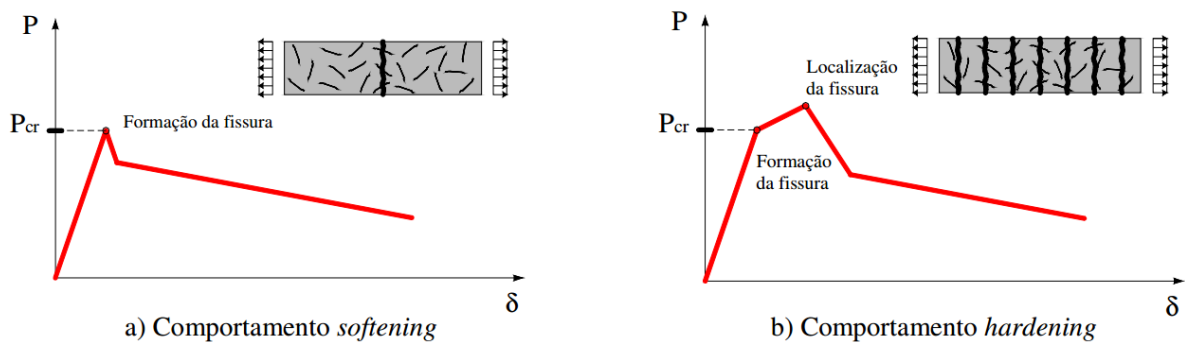


Figura 2.6 – Comportamento do CRFA à tração direta segundo o CEB-FIP (2010) (MORAES NETO, 2013).

### 2.4.3. Resistência à Flexão

Segundo o ACI 544.4R-88, comparativamente ao concreto simples, o CRFA apresenta acréscimos na resistência à flexão superior aos acréscimos obtidos na resistência à compressão e à tração direta. O ACI 554.1R-96 informa que a resistência à flexão do CRFA é de 50% a 70% maior que a resistência do concreto simples em testes de flexão com três pontos de carregamento, ver figura 2.7.

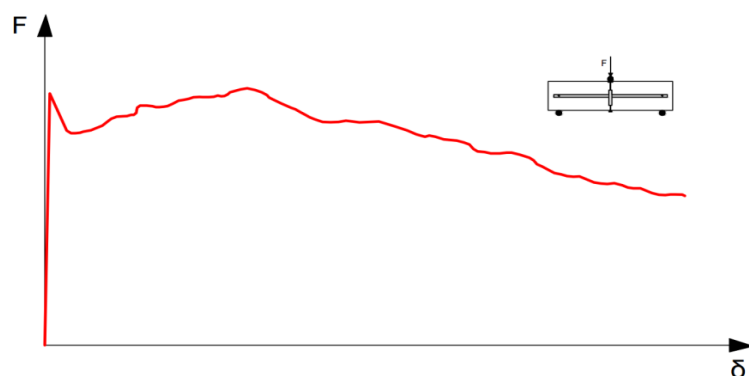


Figura 2.7 – Relação *caraga x deslocamento* para avaliar o CRFA flexionado.

Para quantificar a contribuição das fibras na resistência à flexão, algumas normas especificam a realização ensaios experimentais de flexão, onde as relações *carga-deslocamento* ou *carga-abertura da fissura* são avaliadas. Alternativamente, há recomendações que apresentam considerações fundamentadas no valor do volume de fibras ( $V_f$ ), fator de forma ( $l_f/d_f$ ), resistência à compressão do concreto, entre outros. Como citado anteriormente, trabalhos como o de LOPES (2005) e de MONTAIGNAC *et al.* (2011) colocam que o acréscimo de resistência à flexão proporcionado pelas fibras é uma opção viável para substituir parcialmente, ou completamente, a armadura convencional do concreto armado.

### 3. Recomendações Normativas

Neste capítulo serão discutidas as propostas de cinco recomendações normativas referente ao cálculo do momento resistente  $M_R$  de vigas em CRFA, a saber:

- ACI 544.4R-88: Design Considerations for Steel Fiber Reinforced Concrete;
- RILEM TC 162-TDF (2003): Test and Design Methods for Steel Fibre Reinforced Concrete:  $\sigma$ - $\varepsilon$  Design method;
- CECS 38:2004 – Technical Specification for Fiber Reinforced Concrete Structures;
- CEB-FIP Model Code 2010 – Final Draft;
- Deutsche Ausschuss für Stahlbeton – DAfStb Technical Rule on Steel Fibre Reinforced Concrete Draft – 2010.

O cálculo do momento resistente  $M_R$  de uma viga em CRFA segue a metodologia das vigas em concreto armado, diferenciando apenas na contribuição do concreto tracionado. Será apresentada nas seções seguintes que a contribuição do concreto tracionado, ou seja, que a contribuição das fibras, pode ser apresentada em função de uma tensão residual, a qual é obtida a partir de um ensaio padronizado (dependendo de uma resposta experimental), ou em função de parâmetros como o volume de fibras ( $V_f$ ), fator de forma ( $l_f/d_f$ ) e outros. Nesse contexto, verificar-se-á que as propostas são aplicadas com mais praticidade quando a contribuição da fibra é dada de forma direta (função de  $V_f$ ,  $l_f/d_f$ , etc), ou com menos praticidade, quando a contribuição das fibras depender dos ensaios experimentais.

#### 3.1. ACI 544.4R-88: Design Considerations for Steel Fiber Reinforced Concrete

O ACI 544.4R-88 apresenta formulações distintas para tratar vigas reforçadas apenas com fibras (sem armadura convencional) e vigas com ambos os reforços, fibras e armaduras. Entretanto, ressalta-se que será apresentada apenas a última formulação (armaduras + fibras).

O ACI 544.4R-88 comenta que a proposta em questão é fundamentada no trabalho de HENAGER e DOHERTY (1976) e que a metodologia de cálculo para  $M_R$  de vigas em CRFA segue a mesma metodologia das vigas em concreto armado, diferenciando apenas na contribuição do concreto tracionado (contribuição das fibras). O modelo proposto pelo ACI é apresentado na figura 3.1, onde se verifica que a contribuição das fibras é dada em função da tensão  $\sigma_t$ , a qual é definida como segue:

$$\sigma_t = 0,00772 \cdot \frac{l_f}{d_f} \cdot \rho_f \cdot F_{be} \text{ (MPa)} \quad \text{Equação 3.1}$$

Sendo:

$l_f$ : comprimento da fibra de aço (mm);

$d_f$ : diâmetro da fibra de aço (mm);

$\rho_f$ : volume das fibras (%);

$F_{be}$ : fator de eficiência da ligação fibra-concreto, variando de 1 a 1,2 dependendo das características da fibra utilizada.

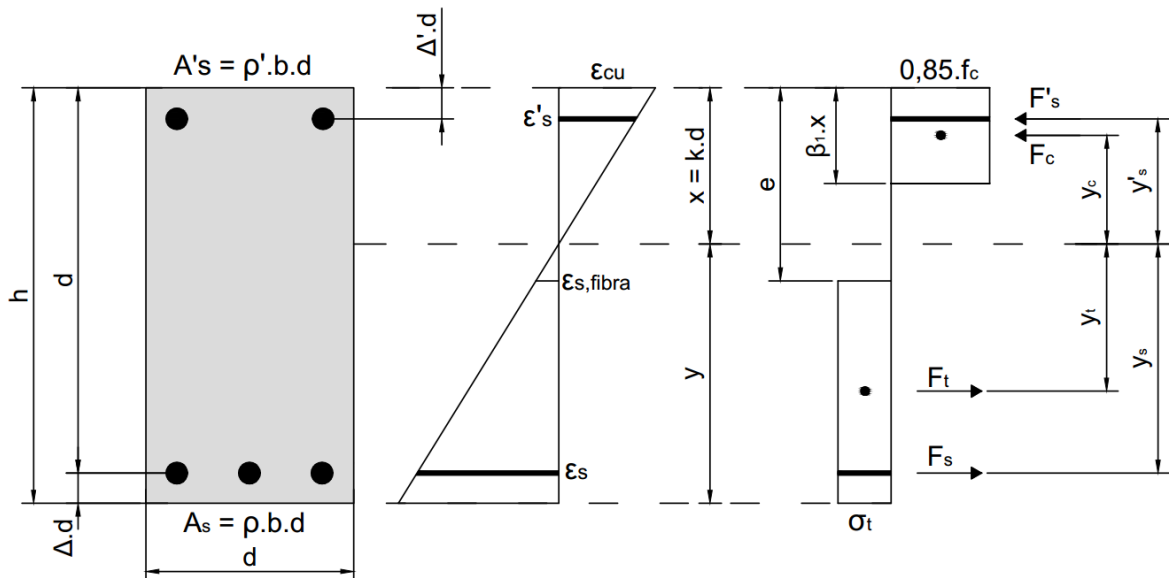


Figura 3.1 – Modelo de flexão proposto pelo ACI 544.4R-88.

Na figura 3.1 a linha neutra é definida por  $x = k \cdot d$  e a altura do bloco de compressão é dada por  $\beta_1 \cdot x$ , sendo o valor de  $\beta_1$  definido segundo o ACI 318 (2011), como segue:



$$\beta_1 = \begin{cases} 0,85 & \text{se } f_c \leq 28 \text{ MPa} \\ 0,85 - \left[ 0,05 \left( \frac{f_c - 28}{7} \right) \right] & \text{se } 28 < f_c < 55 \text{ MPa} \\ 0,65 & \text{se } f_c \geq 55 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Equação 3.2}$$

A cota  $e$ , apresentada na figura 3.1, é definida por:

$$e = (\varepsilon_{sfibra} + \varepsilon_{cu}) \cdot \frac{kd}{\varepsilon_{cu}} \quad \text{Equação 3.3}$$

Sendo:

$\varepsilon_{sfibra} = \sigma_f / E_s$  a deformação na fibra, onde  $\sigma_f$  é a tensão de escorregamento (*pull-out*) da fibra e  $E_s$  é o módulo de elasticidade do aço. Na falta de dados experimentais se admite  $\sigma_f = 2,3 \text{ MPa}$ .

O ACI 544.4R-88 considera a deformação  $\varepsilon_{cu} = 3,0\%$ , ver figura 3.1, porém, comenta a pesquisa de HASSOUN e SAHEBJAM (1985) que recomenda  $\varepsilon_{cu} = 3,5\%$  para vigas com volume de fibras de até 1% e  $\varepsilon_{cu} = 4,0\%$  para vigas com volume de 1 a 3%. Nos cálculos, adotou-se  $\varepsilon_{cu} = 3,0\%$ .

O cálculo do momento resistente  $M_R$  da seção transversal mostrada na figura 3.1 se dá de forma iterativa, onde há a necessidade de compatibilizar a distribuição das deformações (distribuição linear) e de se estabelecer o equilíbrio das resultantes das forças,  $\sum F=0$  ( $F_c$ ,  $F_t$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ). O roteiro utilizado no cálculo do momento resistente ( $M_R$ ) é apresentado no fluxograma da figura 3.2.

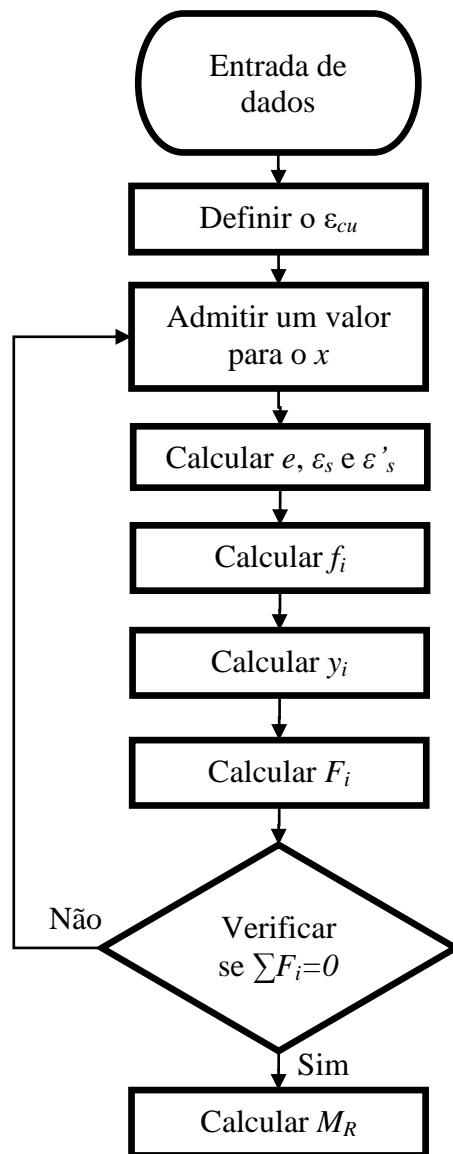


Figura 3.2 – Fluxograma do cálculo segundo o ACI 544.4R-88.

Após ser estabelecida a compatibilização das deformações e o equilíbrio das resultantes das forças, o cálculo do momento  $M_R$  é dado por:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i \quad \text{Equação 3.6}$$

Onde:

$F_i$ : resultante das forças ( $F_c$ ,  $F_t$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ), ver figura 3.1;

$y_i$ : distância entre as resultantes e a linha neutra da seção, ver figura 3.1.

### 3.2. RILEM TC 162-TDF: Test and Design Methods for Steel Fibre Reinforced Concrete: $\sigma$ - $\epsilon$ Design method

A lei constitutiva  $\sigma$ - $\epsilon$  adotada pelo RILEM TC 162-TDF (2003) para estabelecer o modelo de flexão de vigas em CRFA é apresentada na figura 3.3. A referida figura deixa claro que o RILEM considera a contribuição do concreto tracionado apenas para o comportamento *softening* (amolecimento). Informa-se que o RILEM recomenda aplicar o modelo a concretos com resistência à compressão ( $f_c$ ) inferior a 50 MPa. Admitindo, entretanto, classes de resistência superior mediante cuidados adicionais que evitem o modo de ruína frágil pela ruptura das fibras. Além das considerações apresentadas, o RILEM também recomenda que a deformação no nível da armadura tracionada seja limitada a 25‰.

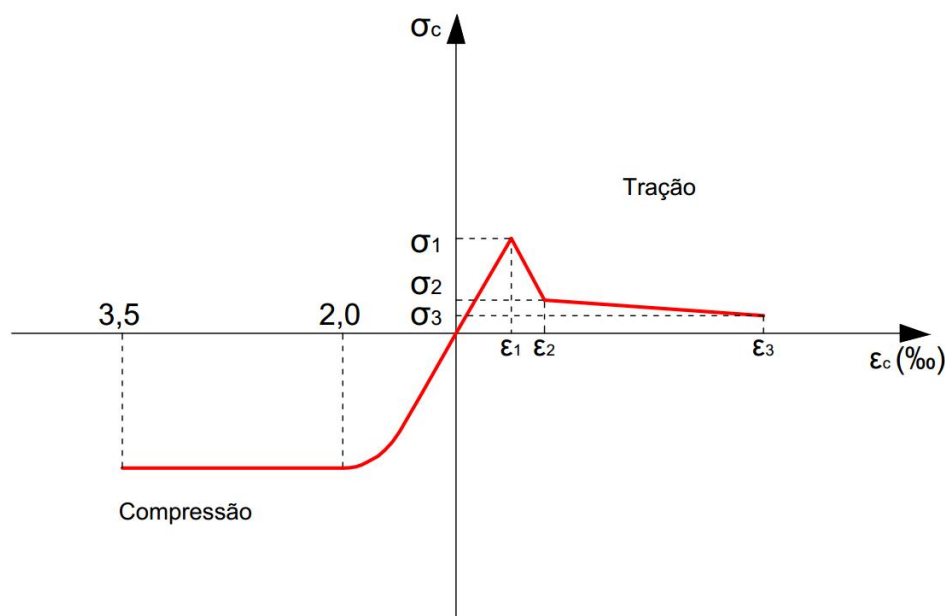


Figura 3.3 – Relação tensão-deformação no CRFA segundo o RILEM TC 162-TDF (2003).

Analisando a figura, fica claro que a contribuição do RILEM diz respeito à contribuição do concreto tracionado, visto que o comportamento do concreto comprimido segue a mesma recomendação do concreto simples, sem sofrer influência das fibras. Desta forma, admite-se que o comportamento do concreto comprimido seja definido pelas recomendações do CEB-FIP (2010) para o concreto simples, como mostra a figura 3.4.

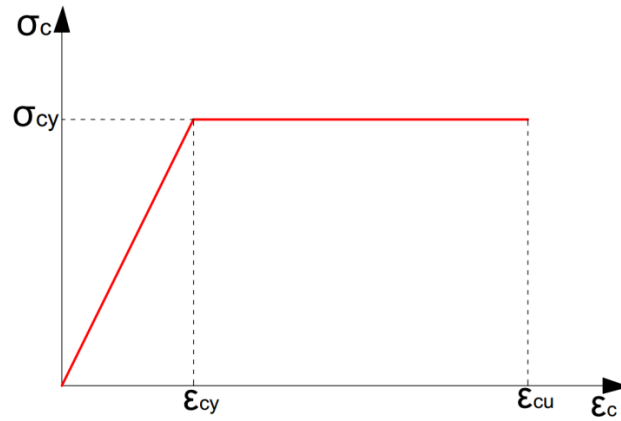


Figura 3.4 – Lei constitutiva do CRFA comprimido (adaptado do CEB-FIP, 2010).

Na figura 3.4,  $\sigma_{cy} = f_c$  e os valores de deformações  $\epsilon_{cy}$  e  $\epsilon_{cu}$  são dados como segue:

$$\epsilon_{cy} = \begin{cases} 1,75 & \text{se } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 1,75 + \frac{0,55}{40} \cdot [(f_c - 8) - 50] & \text{se } f_c > 58 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\%) \quad \text{Equação 3.7}$$

$$\epsilon_{cu} = \begin{cases} 3,5 & \text{se } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 2,6 + 35 \left[ \frac{90 - (f_c - 8)}{100} \right]^4 & \text{se } f_c > 58 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\%) \quad \text{Equação 3.8}$$

No tocante à contribuição do CRFA tracionado, o RILEM TC 162-TDF (2003) apresenta a lei constitutiva mostrada na figura 3.5, mesma lei mostrada na figura 3.3, e cujos valores de tensão e deformação são apresentados nas equações 3.9 a 3.14.

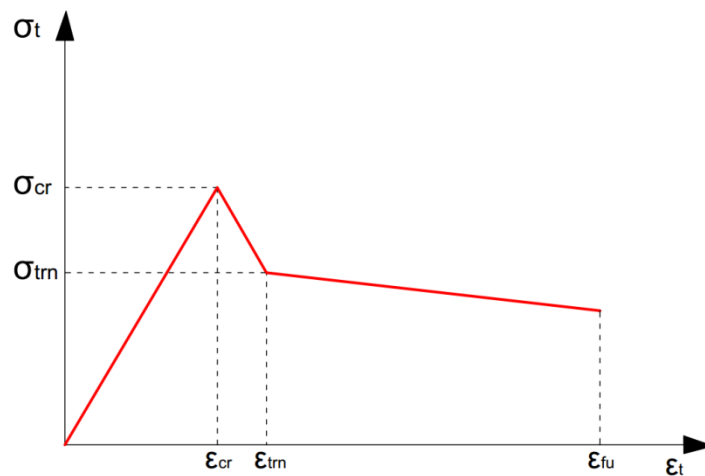


Figura 3.5 – Lei constitutiva do CRFA tracionado (RILEM TC 162-TDF, 2003).

$$f_{cr} = \sigma_1 = 0,7 \cdot f_{ctm,f} \cdot \left(1,6 - \frac{d}{1000}\right) \quad (MPa, mm) \quad \text{Equação 3.9}$$

$$f_{trn} = \sigma_2 = 0,45 \cdot f_{R,1} \cdot k_h \quad \text{Equação 3.10}$$

$$f_{t,bot} = \sigma_3 = 0,37 \cdot f_{R,4} \cdot k_h \quad \text{Equação 3.11}$$

Onde:

$f_{ctm,f}$ : resistência média a tração na flexão (ver equação 3.15);

$k_h$ : fator de forma (ver figura 3.6 ou equação 3.17);

$f_{R,i}$ : resistência residual à tração na flexão (ver equação 3.18).

$$\varepsilon_{cr} = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_c} = \frac{f_{cr}}{E_c} \quad \text{Equação 3.12}$$

$$\varepsilon_{trn} = \varepsilon_2 = \varepsilon_{cr} + 0,1 \quad (\text{‰}) \quad \text{Equação 3.13}$$

$$\varepsilon_{t,bot} = \varepsilon_3 = 25 \text{ ‰} \quad \text{Equação 3.14}$$

Na equação 3.9, o valor de  $f_{ctm,f}$  é dado segundo as recomendações do CEB-FIP (2010), como segue:

$$f_{ctm,f} = f_{ctm} \cdot \frac{1 + 0,006 \cdot h^{0,7}}{0,006 \cdot h^{0,7}} \quad \text{Equação 3.15}$$

Onde  $h$  é a altura da viga (mm) e  $f_{ctm}$  é a resistência média do concreto à tração, definida conforme o CEB-FIP (2010):

$$f_{ctm} = \begin{cases} 0,3 \cdot (f_c - 8)^{2/3} & \text{se } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 2,12 \cdot \ln(1 + 0,1 \cdot f_c) & \text{se } f_c > 58 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Equação 3.16}$$

Nas equações 3.10 e 3.11, o valor do fator de forma  $k_h$  é dado como segue:

$$k_h = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq h \leq 125 \\ 1,0 - 0,6 \cdot \left(\frac{h - 125}{475}\right) & \text{se } 12 < h \leq 600 \text{ (mm)} \\ 0,4 & \text{se } h > 600 \end{cases} \quad \text{Equação 3.17}$$

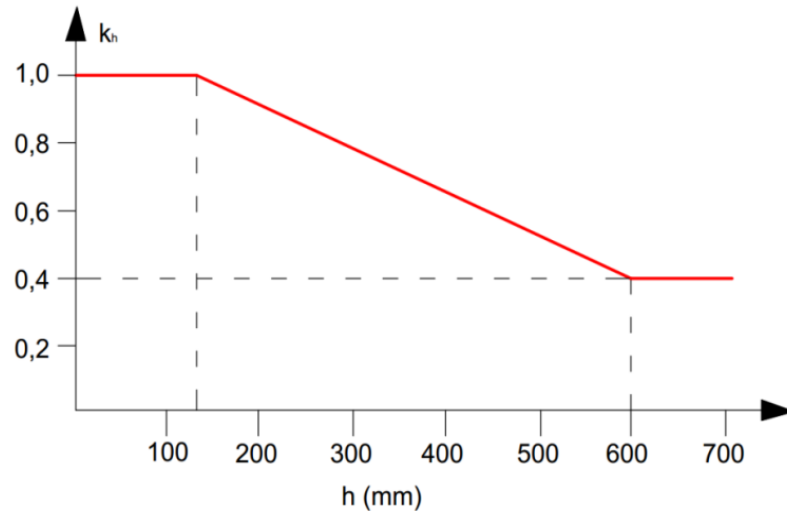


Figura 3.6 – Valores do fator de forma  $k_h$ .

Para estabelecer os valores das tensões residuais  $f_{R1}$  e  $f_{R4}$ , o RILEM TC 162-TDF (2002) recomenda a realização do ensaio de flexão em três pontos de vigas entalhadas, como mostrado resumidamente na figura 3.7. Nesse ensaio são registradas as relações *carga-deslocamento* (flecha) e *carga-CMOD* ( $CMOD = Crack Mouth Opening Displacement$ ). Para exemplificar, apresenta-se na figura 3.8 um gráfico típico da relação *carga-deslocamento*.

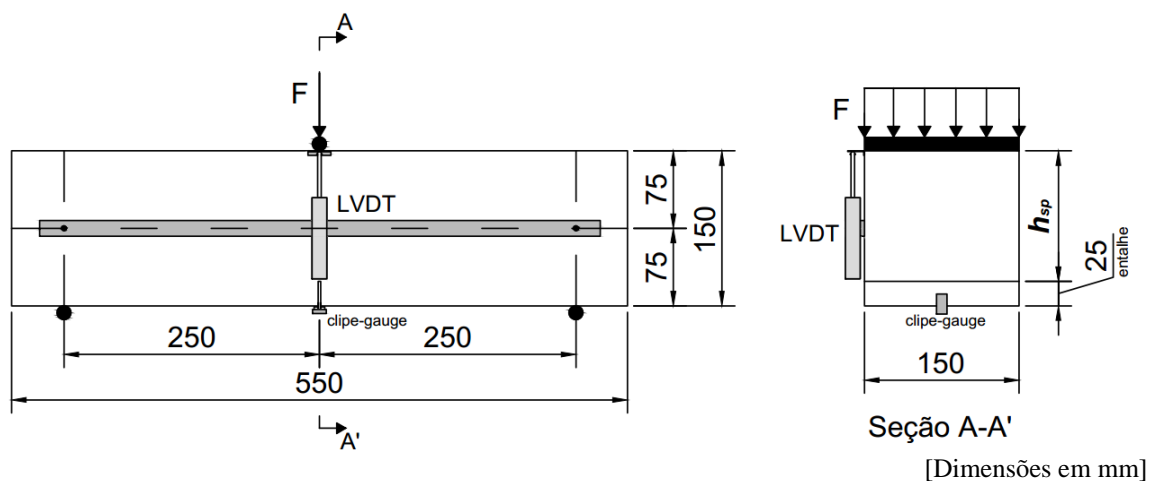


Figura 3.7 – Ensaio de flexão (adaptado RILEM TC 162-TDF, 2002).

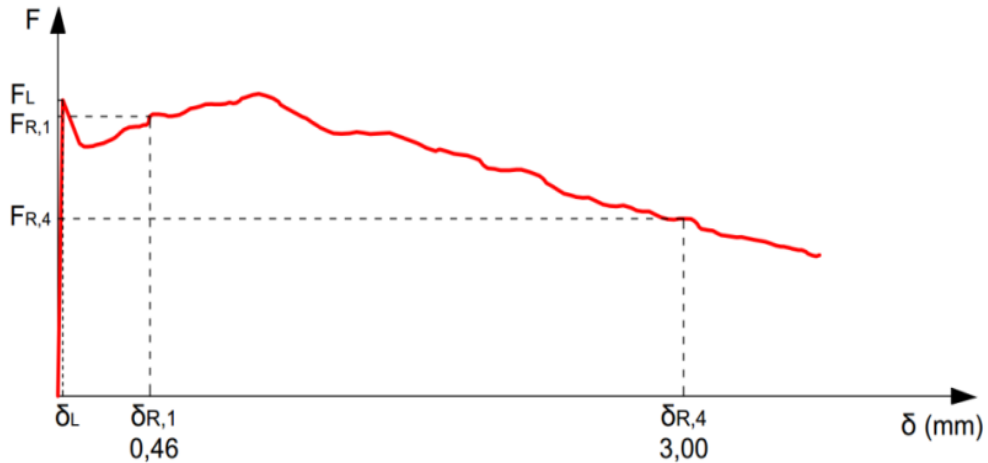


Figura 3.8 – Relação carga-deslocamento (adaptado RILEM TC 162-TDF, 2002).

Nesse contexto, os valores das tensões residuais  $f_{R,i}$  são calculados como segue:

$$f_{R,i} = \frac{3 \cdot F_{R,i} \cdot L}{2 \cdot b \cdot h_{sp}^2} \quad \text{Equação 3.18}$$

Sendo:

$f_{R,i}$ : resistência residual à tração na flexão correspondente a força  $F_{R,i}$ ;

$F_{R,i}$ : carga correspondente, ou ao  $CMOD_i$ , ou ao deslocamento  $\delta_{R,i}$ , com [i = 1 e 4].

Onde  $CMOD_1 = 0,5$ ;  $CMOD_4 = 3,5$ ;  $\delta_1 = 0,46$ ; e  $\delta_4 = 3,0$ ;

$l = 500 \text{ mm}$ : vão da viga ensaiada (ver figura 3.7);

$b = 150 \text{ mm}$ : base da viga ensaiada (ver figura 3.7);

$h_{sp} = 125 \text{ mm}$ : altura da viga no plano do entalhe (ver figura 3.7).

Estabelecida a lei constitutiva que define o modelo de flexão, apresenta-se na figura 3.9 o modelo de flexão proposto pelo RILEM TC 162-TDF (2003). O cálculo do momento resistente  $M_R$  é dado de forma iterativa, como explica o fluxograma mostrado na figura 3.10. Após alcançar a compatibilidade das deformações ( $\epsilon$ ) e o equilíbrio das resultantes de força  $\sum F=0$  ( $F_{cw}$ ,  $F_{cy}$ ,  $F_{cr}$ ,  $F_{trb}$ ,  $F_{t,bob}$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ),  $M_R$  é definido por:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i \quad \text{Equação 3.19}$$

Onde:

$F_i$ : resultante das forças ( $F_{cu}$ ,  $F_{cy}$ ,  $F_{cr}$ ,  $F_{trn}$ ,  $F_{t,bot}$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ), ver figura 3.9;

$y_i$ : distância entre as resultantes e a linha neutra da seção, ver figura 3.9.

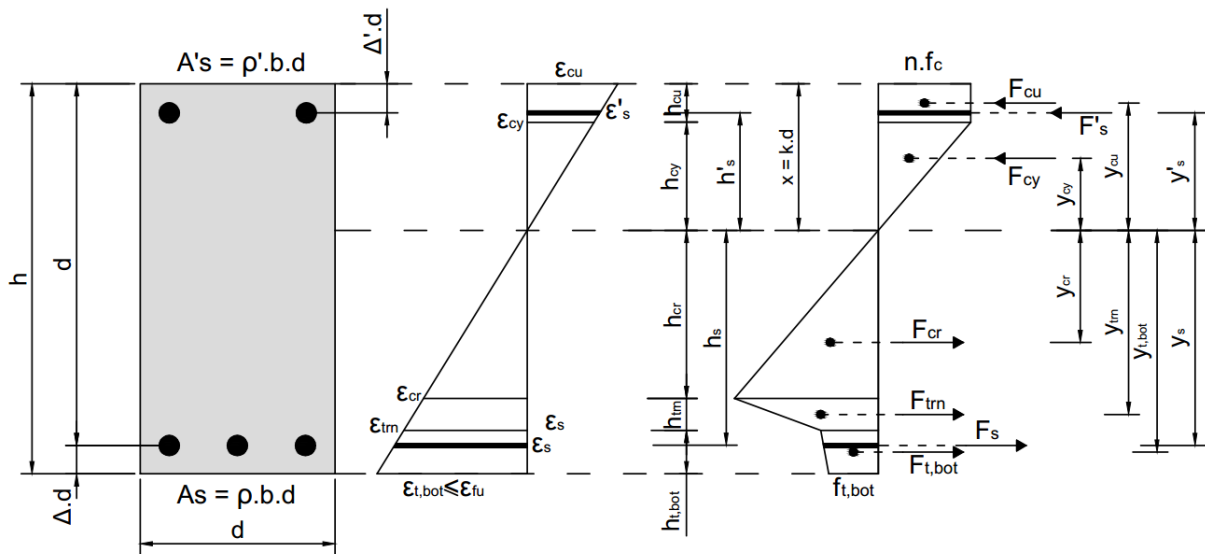


Figura 3.9 – Modelo de flexão proposto pelo RILEM TC 162-TDF (2003).



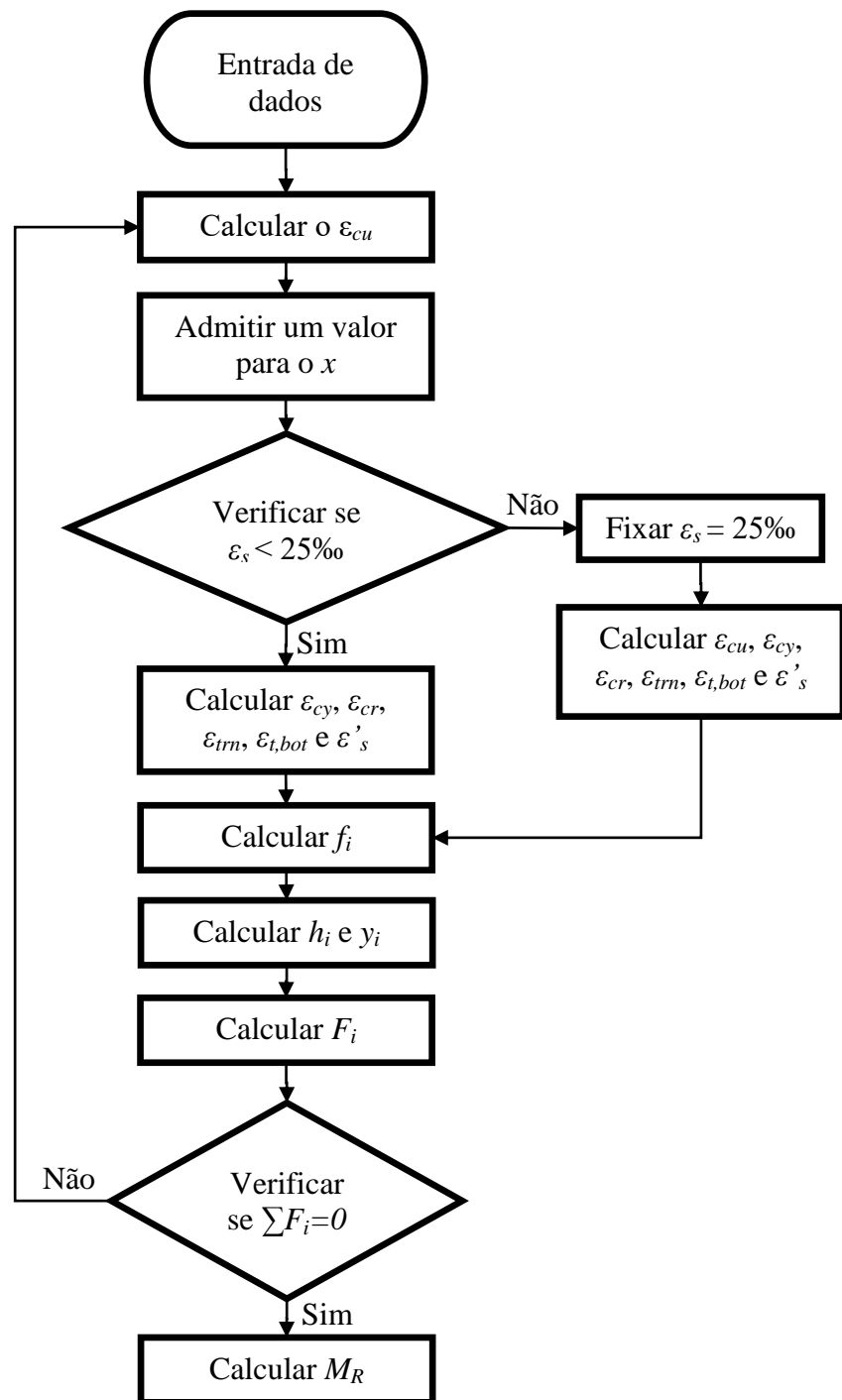


Figura 3.10 – Cálculo de  $M_R$  segundo o RILEM TC 162-TDF (2003).

### 3.3. CECS 38:2004 – Technical Specification for Fiber Reinforced Concrete Structures

O modelo de flexão proposto pelo CECS 38 (2004) é mostrado na figura 3.11. Conforme discutido anteriormente, as considerações do CECS diz respeito à participação das fibras

no modelo (concreto tracionado), sendo o concreto comprimido definido segundo o GB50010 (2002), que define o modelo de flexão para o concreto armado (sem fibras).

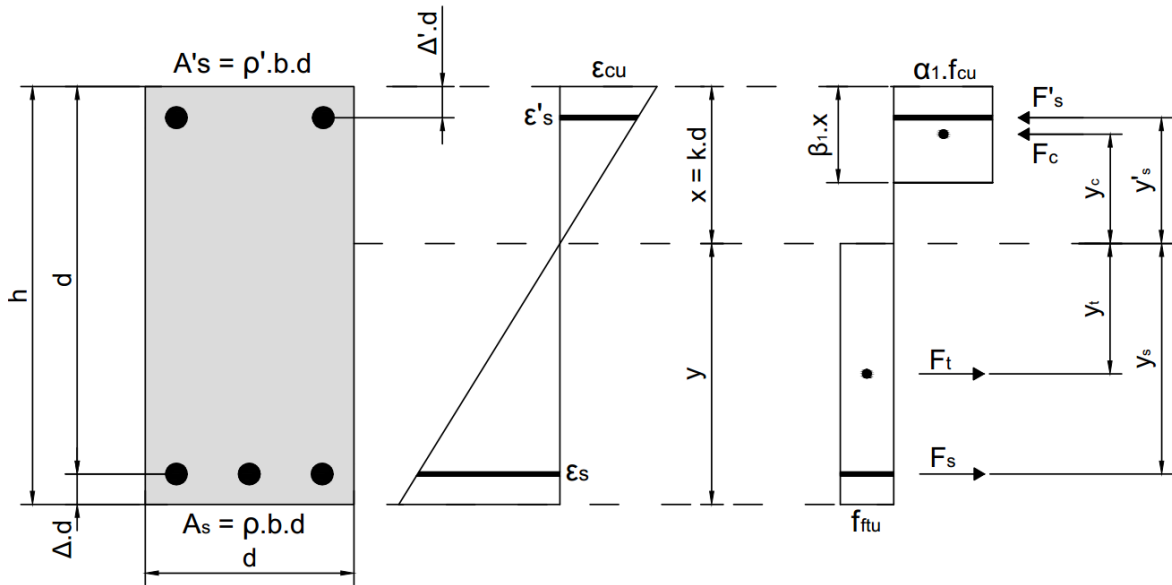


Figura 3.11 – Modelo de flexão segundo o CECS 38 (2004).

No tocante ao bloco de compressão, os valores de  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  são dados conforme as recomendações do GB50010 (2002), como segue:

$$\alpha_1 = \begin{cases} 1,0 & \text{se } f_{cu} \leq 50 \text{ MPa} \\ \frac{33 - 0,06 \cdot f_{cu}}{30} & \text{se } 50 < f_{cu} < 80 \text{ MPa} \\ 0,94 & \text{se } f_{cu} \geq 80 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Equação 3.20}$$

$$\beta_1 = \begin{cases} 0,8 & \text{se } f_{cu} \leq 50 \text{ MPa} \\ \frac{27 - 0,06 \cdot f_{cu}}{30} & \text{se } 50 < f_{cu} < 80 \text{ MPa} \\ 0,74 & \text{se } f_{cu} \geq 80 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Equação 3.21}$$

Sendo  $f_{cu} = f_c/0,8$  a resistência à compressão do concreto obtido em corpo de prova cúbico. A deformação máxima permitida à compressão ( $\epsilon_{cu}$ ) é 3,3‰. Para o bloco de tração, o CECS 38 (2004) sugere para o  $f_{ftu}$ :

$$f_{ftu} = f_t \cdot \beta_{tu} \cdot \lambda_t \quad \text{Equação 3.22}$$

Onde:

$f_t$ : resistência á tração direta do concreto (ver equação 3.23);

$\beta_{tu}$ : fator de utilização da viga (ver tabela 3.1);

$\lambda_t = \rho_f \cdot \frac{l_f}{d_f}$ : fator que leva em conta a participação das fibras;

$\rho_f$ : volume das fibras;

$l_f$ : comprimento das fibras;

$d_f$ : diâmetro das fibras.

Tabela 3.1 – Valores de  $\beta_{tu}$  (CECS 38, 2004).

	Viga sobre esforços de flexão ou compressão com grandes excentricidades	Viga sobre tração axial sem ou com pequenas excentricidades	Viga sobre tração axial com grandes excentricidades
$\beta_{tu}$	1,3	0,4	0,65

Na equação 3.22, o valor da resistência à tração é definido como sugere o GB 500010 (2002):

$$f_t = 0,88 \cdot 0,395 \cdot f_{cu}^{0,55} \cdot (1 - 1,645 \cdot \delta) \cdot 0,45 \quad \text{Equação 3.23}$$

Sendo  $\delta$  dado na tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Valores de  $\delta$  (GB 500010, 2002).

$f_c$ (MPa)	15	20	25	30	35	40	45	50	60-80
$\delta$	0,21	0,18	0,16	0,14	0,13	0,12	0,12	0,11	0,11

Novamente, o cálculo do momento resistente ( $M_R$ ) é estabelecido, ver equação 3.24, iterativamente após ser alcançada a compatibilização das deformações  $\varepsilon$  e o equilíbrio das resultantes de força,  $\sum F=0$  ( $F_c$ ,  $F_b$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ), da seção apresentada na figura 3.11. O processo iterativo é apresentado no fluxograma da figura 3.12.

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i \quad \text{Equação 3.24}$$

Onde:

$F_i$ : resultante das forças ( $F_c$ ,  $F_t$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ), ver figura 3.11;

$y_i$ : distância entre as resultantes e a linha neutra da seção, ver figura 3.11.

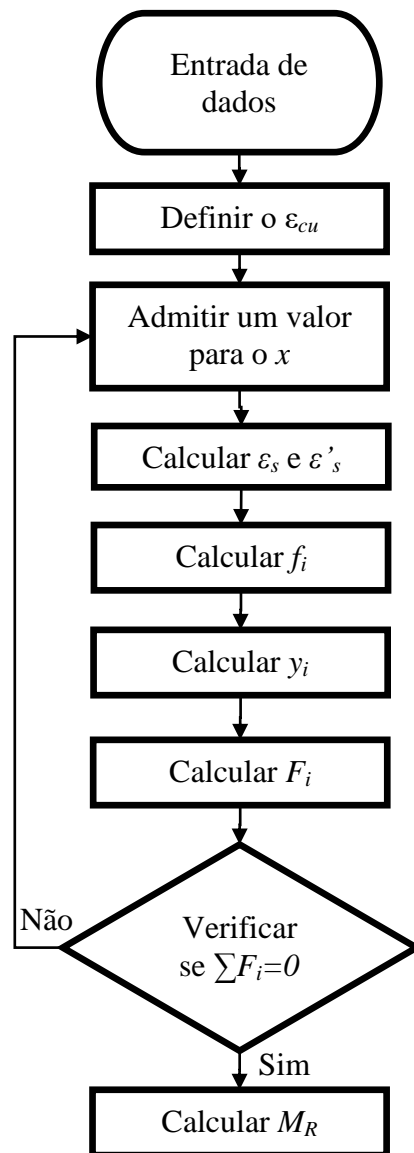


Figura 3.12 – Fluxograma do cálculo segundo o CECS 38 (2004).

### 3.4. CEB-FIP Model Code 2010 – Final Draft

O CEB-FIP (2010) propõe o modelo de flexão apresentado na figura 3.13. Nesse modelo são previstos três modos de ruína para a viga, o esmagamento do concreto comprimido,

$\varepsilon_c \geq \varepsilon_{cu}$ , a ruptura do concreto tracionado,  $\varepsilon_{t,bot} \geq \varepsilon_{fu}$ , e por fim, a ruptura da armadura tracionada,  $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{su}$ .

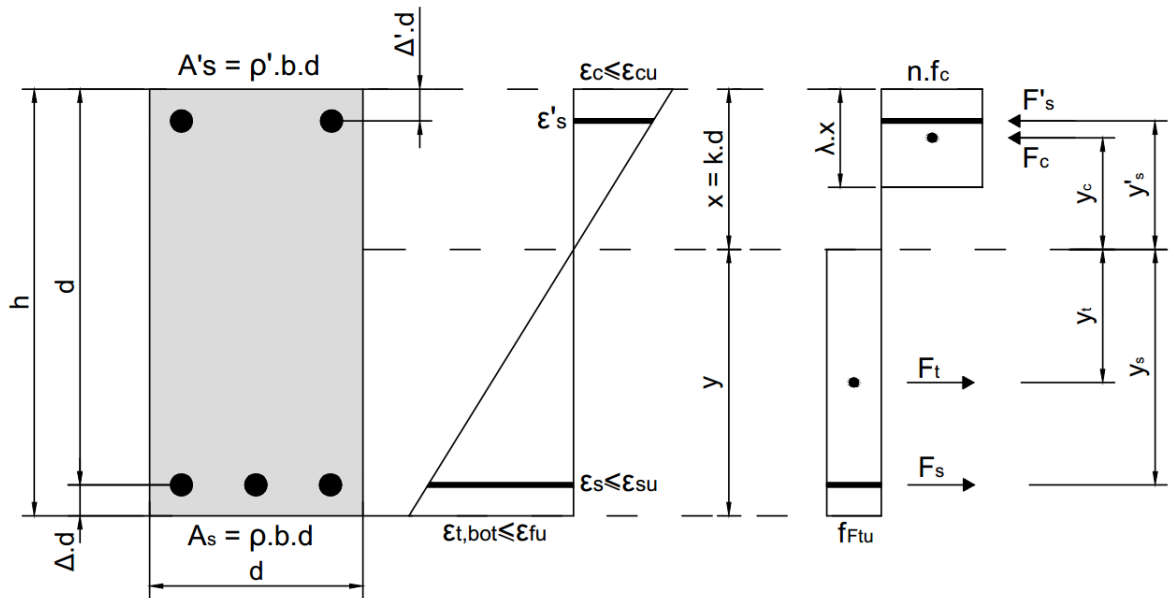


Figura 3.13 – Deformações e tensões numa seção transversal segundo o CEB-FIP (2010).

Nessa abordagem, a deformação última do concreto comprimido  $\varepsilon_{cu}$  é dada como segue:

$$\varepsilon_{cu} = \begin{cases} 3,5 & \text{se } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 2,6 + 35 \left[ \frac{90 - (f_c - 8)}{100} \right]^4 & \text{se } f_c > 58 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\text{‰}) \quad \text{Equação 3.25}$$

A deformação limite do concreto tracionado  $\varepsilon_{fu}$  é definida pelo CEB-FIP (2010) da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{fu} = \frac{w_u}{l_{cs}} \quad \text{Equação 3.26}$$

Na equação de  $\varepsilon_{fu}$ ,  $w_u = 2,5$  mm representa a abertura máxima da fissura admissível e  $l_{cs}$  diz respeito ao comprimento estrutural característico (*structural characteristics length*), definido como:

$$l_{cs} = \min \{s_{rm}, y\} \quad \text{Equação 3.27}$$

Sendo:

$y$ : distância da linha neutra à fibra mais tracionada da seção transversal (ver figura 3.13);

$s_{rm}$ : distância média entre fissuras. Segundo PEDERSEN (1996), admitir  $s_{rm} = d/2$  conduz a respostas satisfatórias.

No que diz respeito à distribuição das tensões, o bloco de compressão é definido em função dos parâmetros  $\lambda$  e  $\eta$ , os quais são definidos pelo CEB-FIP (2010) como segue:

$$\lambda = \begin{cases} 0,8 & \text{se } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ 0,8 - \frac{(f_c - 50)}{400} & \text{se } 50 < f_c \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Equação 3.28}$$

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{se } f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ 1 - \frac{(f_c - 50)}{200} & \text{se } 50 < f_c \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Equação 3.29}$$

Para o bloco de tração, é necessário conhecer apenas o valor de  $f_{Ftu}$ , uma vez que o valor de  $y$  é definido após a compatibilização das deformações e o equilíbrios das resultantes de força, ver figura 3.13. Segundo o CEB-FIP, o CRFA fissurado pode ser representado a partir de duas leis constitutivas, ambas escritas em função da relação *tensão – abertura da fissura*,  $\sigma-w$ . Entre as leis, tem-se o modelo rígido-plástico, figura 3.14 (a), e o modelo linear (comportamento *softening* e *hardening*), figura 3.14 (b).

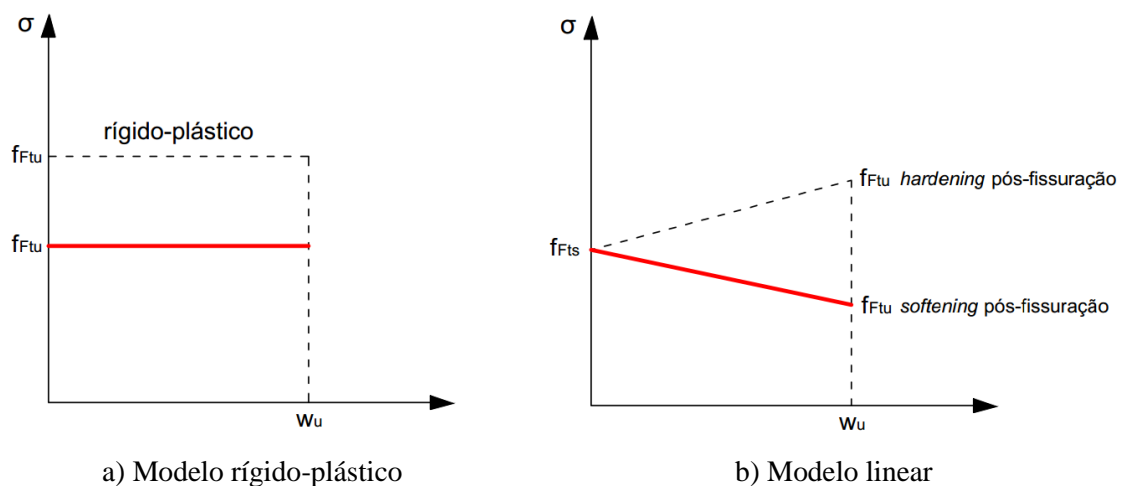


Figura 3.14 – Leis constitutivas para o CRFA fissurado (CEB-FIP, 2010).

Na figura 3.14, os parâmetros  $f_{Fts}$ ,  $f_{Ftu}$  são, respectivamente, as tensões residuais à tração na flexão no estado limite de serviço e último. Salienta-se que neste trabalho será abordado apenas o modelo linear. Dessa forma, têm-se para os valores de tensões:

$$f_{Fts} = 0,45 \cdot f_{R1} \quad \text{Equação 3.30}$$

$$f_{Ftu} = f_{Fts} - \frac{w_u}{CMOD_3} \cdot (f_{Fts} - 0,5 \cdot f_{R3} + 0,2 \cdot f_{R1}) \geq 0 \quad \text{Equação 3.31}$$

Nas equações anteriores,  $f_{R,i}$  são as resistências residuais à tração na flexão, as quais são obtidas semelhante a abordagem do RILEM TC 162-TDF (2002), como segue:

$$f_{R,i} = \frac{3 \cdot F_i \cdot L}{2 \cdot b \cdot h_{sp}^2} \quad \text{Equação 3.32}$$

Sendo:

$f_{R,i}$ : resistência residual à tração na flexão correspondente à força  $F_i$ ;

$F_i$ : carga relativa ao respectivo  $CMOD_i$ , com  $i = 1$  e  $3$ , onde  $CMOD_1 = 0,5$  mm e  $CMOD_3 = 2,5$  mm (ver figura 3.15);

$l = 500$  mm: vão da estrutura ensaiada (ver figura 3.7);

$b = 150$  mm: base da viga ensaiada (ver figura 3.7);

$h_{sp} = 125$  mm: altura da viga no plano do entalhe (ver figura 3.7).

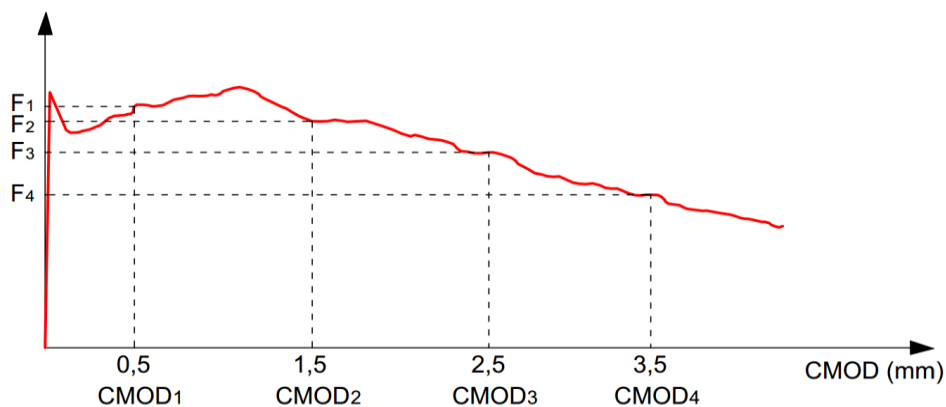


Figura 3.15 – Relação carga x CMOD típica (CEB-FIP ,2010).

Conforme discutido anteriormente, após estabelecer a compatibilização das deformações e o equilíbrio das resultantes de força,  $\sum F=0$  ( $F_c$ ,  $F_t$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ), o cálculo de  $M_R$  é dado a partir da equação 3.33. O processo iterativo é esboçado resumidamente no fluxograma apresentado na figura 3.16.

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i \quad \text{Equação 3.33}$$

Onde:

$F_i$ : resultante das forças ( $F_c$ ,  $F_t$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ), ver figura 3.13;

$y_i$ : distância entre as resultantes e a linha neutra da seção, ver figura 3.13.



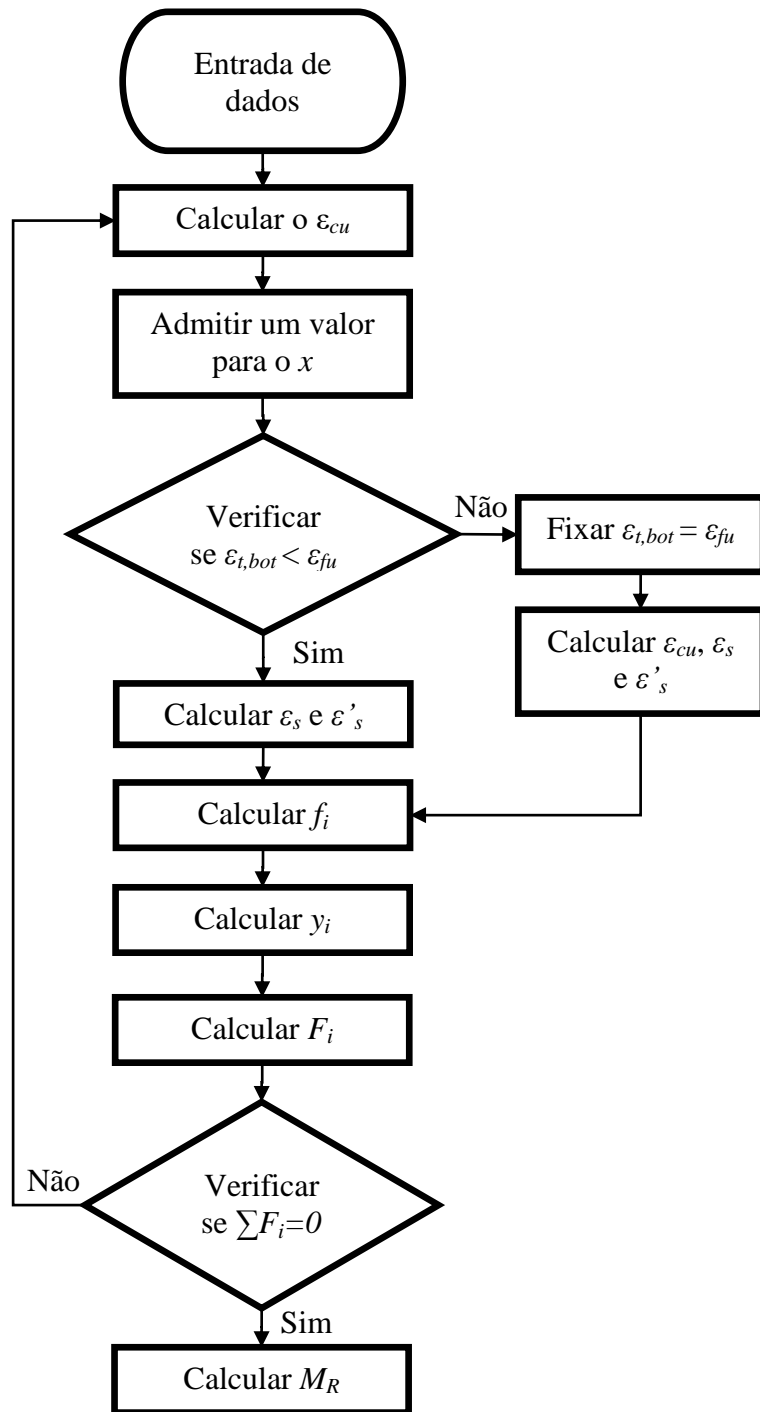


Figura 3.16 –Cálculo de  $M_R$  segundo o CEB-FIP (2010).

### 3.5. Deutsche Ausschuss für Stahlbeton – DAFStb Technical Rule on Steel Fibre Reinforced Concrete Draft-2010

O modelo de flexão proposto pelo DAFStb (2010) é mostrado na figura 3.17. Nesse modelo, a distribuição das tensões no concreto comprimido segue a consideração

simplificada do DIN 1045-1 (2001), como mostra a figura 3.18. Na figura 3.17, os valores dos parâmetros  $\chi$  e  $\kappa$  são dados como segue:

$$\chi = \begin{cases} 0,95 & \text{para } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 1,05 - \frac{f_c - 8}{500} & \text{para } f_c > 58 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Equação 3.34}$$

$$\kappa = \begin{cases} 0,8 & \text{para } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 1,0 - \frac{f_c - 8}{250} & \text{para } f_c > 58 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Equação 3.35}$$

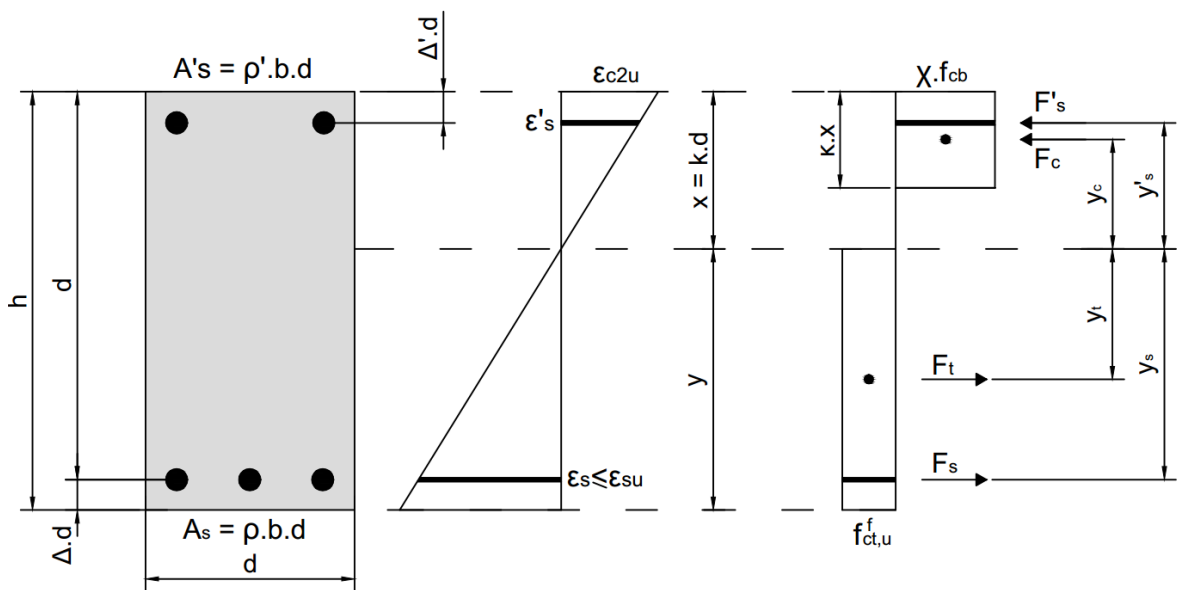


Figura 3.17 – Modelo de flexão proposto pelo DAfStb (2010).

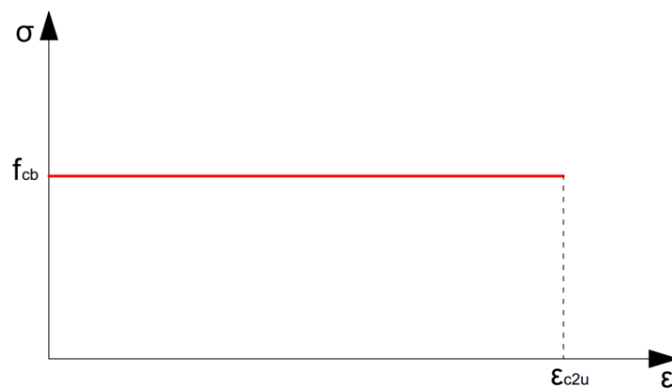


Figura 3.18 – Distribuição das tensões no concreto comprimido segundo DIN 1045-1 (2001).

Ressalta-se que na figura 3.18, os valores de  $f_{cb}$  e  $\varepsilon_{c2u}$  são dados, respectivamente, pela equação 3.32 e a tabela 3.3 (concreto normal). Na equação de  $f_{cb}$ , o DIN 1045-1 (2001) recomenda assumir  $\alpha = 0,85$  para concreto normal (peso específico).

$$f_{cb} = \alpha \cdot (f_c - 8) \quad \text{Equação 3.36}$$

Tabela 3.3 – Análise de deformação  $\varepsilon_{c2u}$  segundo o DIN 1045-1 (2001).

$f_c$ (MPa)	12-60	55-67	60-76	70-85	80-95	100-115
$\varepsilon_{c2u}$	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0

No que diz respeito à distribuição do CRFA tracionado, o DAfStb (2010) recomenda a lei constitutiva mostrada na figura 3.19, a qual é aplicada em análises no estado limite último. Nesta figura 3.19, as tensões  $f_{ctd,L1}^f$  e  $f_{ctd,L2}^f$ , as quais definem a lei trilinear, representam, respectivamente, a resistência à tração pós-fissuração de cálculo na classe de performance L1 e L2. Ressalta-se que as referidas classes serão discutidas posteriormente. Ainda com relação à figura 3.19, têm-se que as tensões  $f_{ct,u}^f$  e  $f_{ct,s}^f$ , as quais definem o bloco de tração, são determinadas como segue:

$$f_{ct,u}^f = \alpha_c^f \cdot f_{ctR,u}^f \quad \text{Equação 3.37}$$

$$f_{ct,s}^f = \alpha_c^f \cdot f_{ctR,s}^f \quad \text{Equação 3.38}$$

Nas equações de  $f_{ct,u}^f$  e  $f_{ct,s}^f$ ,  $\alpha_c^f = 0,85$  corresponde a um fator de redução da resistência à compressão devido ao efeito da aplicação da carga ao longo do tempo. Salienta-se que neste trabalho se adotou a tensão  $f_{ct,u}^f$  para calcular o momento resistente  $M_R$ . Dessa maneira, o valor de  $f_{ctR,u}^f$ , resistência à tração pós-fissuração, é dado como segue:

$$f_{ctR,u}^f = k_F^f \cdot k_G^f \cdot f_{ct0,u}^f \quad \text{Equação 3.39}$$

Sendo:

$k_F^f$ : fator de orientação das fibras. Para o DAfStb,  $k_F^f = 0,5$  quando  $b > 5 \cdot h$  e  $k_F^f = 1,0$  nos demais casos;

$k_G^f = 1,0 + A_{ct}^f \cdot 0,5 \leq 1,70$ : fator de escala. Segundo o DAfStb, pode-se adotar  $A_{ct}^f = 0,9 \cdot A_c$ , com  $A_c$  em  $m^2$ , para peças solicitadas apenas à flexão (sem protensão);

$f_{ct0,u}^f = f_{cfL,L2}^f \cdot \beta_u$ : valor básico da resistência à tração pós-fissuração. Onde  $\beta_u = 0,37$  quando se utiliza o bloco de tração na distribuição das tensões.

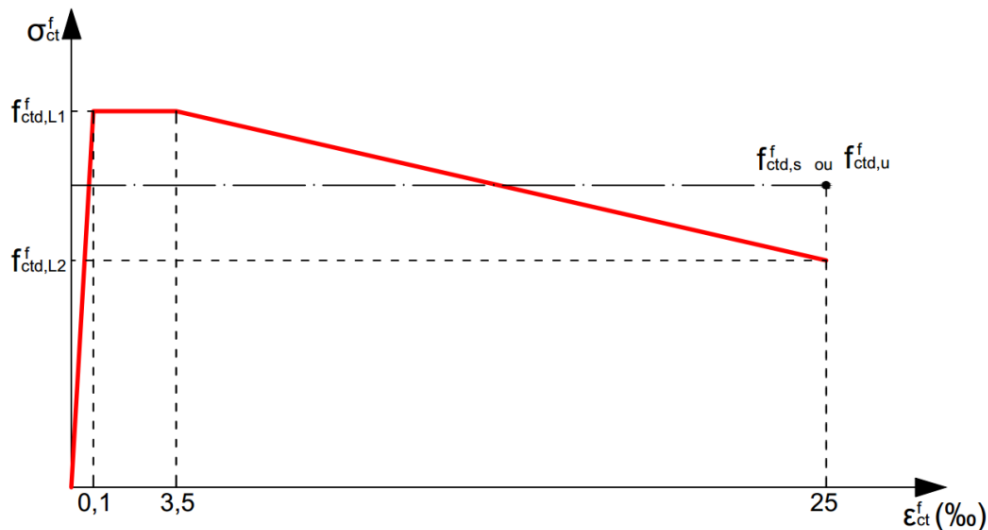


Figura 3.19 – Distribuição das tensões no concreto tracionado segundo o DAfStb (2010).

De acordo com o DAfStb (2010), a resistência à tração na flexão pós-fissuração,  $f_{cfL,L2}^f$ , é determinada a partir do ensaio de flexão mostrado na figura 3.20 e o seu valor é dado pela equação 3.40. A curva típica *carga-deslocamento*,  $F-\delta$ , do ensaio de flexão é mostrada na figura 3.21. Nessa figura, os deslocamentos  $\delta_{L1}$  e  $\delta_{L2}$  são os parâmetros utilizados para definir as classes de performance L1 e L2.

$$f_{cfL,L2}^f = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{F_{3,5,i} \cdot l}{b_i \cdot h_i^2} \quad \text{Equação 3.40}$$

Sendo:

$F_{3,5,i}$ : carga correspondente ao deslocamento  $\delta_{L2} = 3,5$  mm (ver figura 3.21);

$n$ : número de vigas de CRFA ensaiados;

$b_i = 150$  mm: base da viga, com  $i$  variando de 1 a  $n$ ;

$h_i = 150 \text{ mm}$ : altura da viga, com  $i$  variando de 1 a  $n$ ;

$l = 600 \text{ mm}$ : vão da viga.

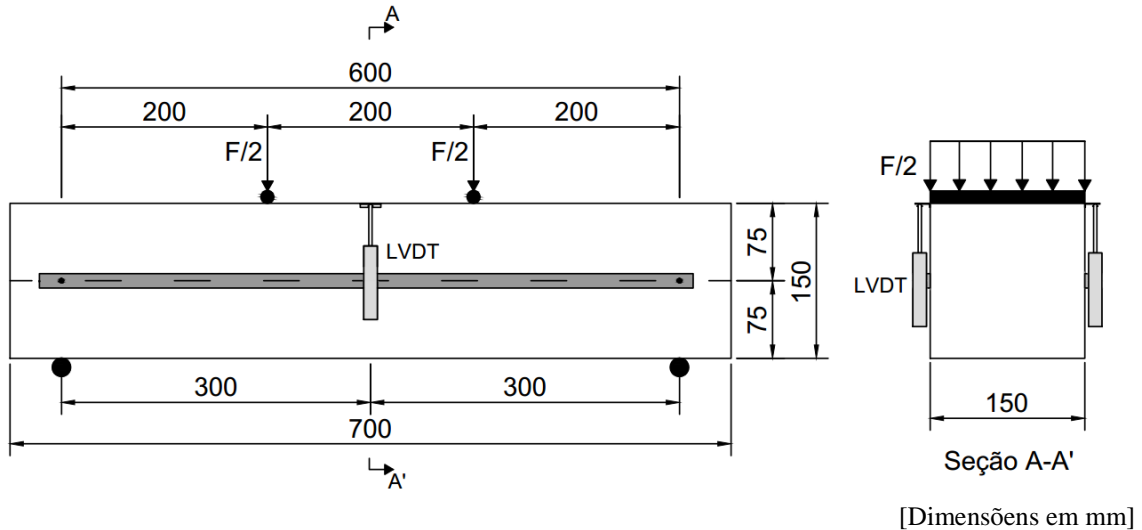


Figura 3.20 – Ensaio de flexão proposto pela DAfStb (2010).

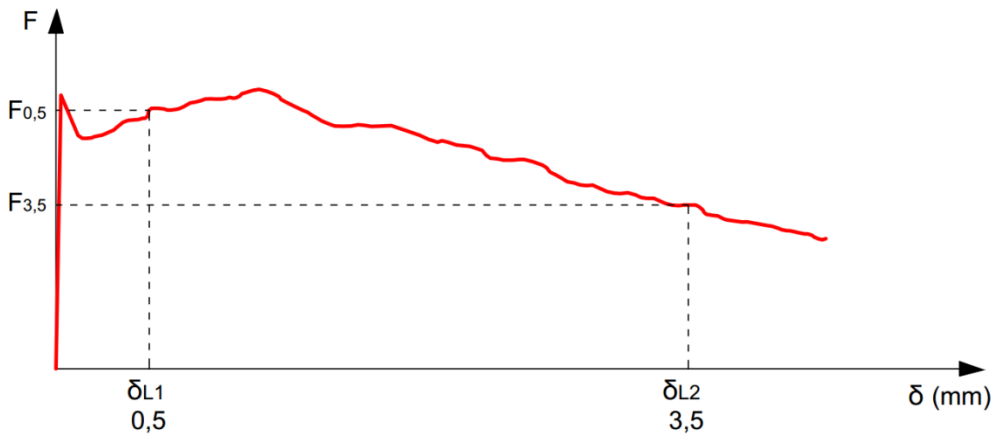


Figura 3.21 – Curva *carga-deslocamento* típica para o ensaio de flexão da figura 3.20 (adaptada DAfStb, 2010).

Definida as tensões e deformações que compõem as leis constitutivas do CRFA comprimido (ver figura 3.18) e tracionado (ver figura 3.19) o cálculo do momento resistente  $M_R$ , equação 3.41, é estabelecido a partir de um procedimento iterativo, onde a distribuição das deformações é compatibilizada e as resultantes de força, oriundas da distribuição das tensões, são equilibradas. Um resumo do processo iterativo é mostrado no fluxograma da figura 3.22.

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i \quad \text{Equação 3.41}$$

Onde:

$F_i$ : resultante das forças ( $F_c$ ,  $F_t$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ), ver figura 3.17;

$y_i$ : distância entre as resultantes e a linha neutra da seção, ver figura 3.17.

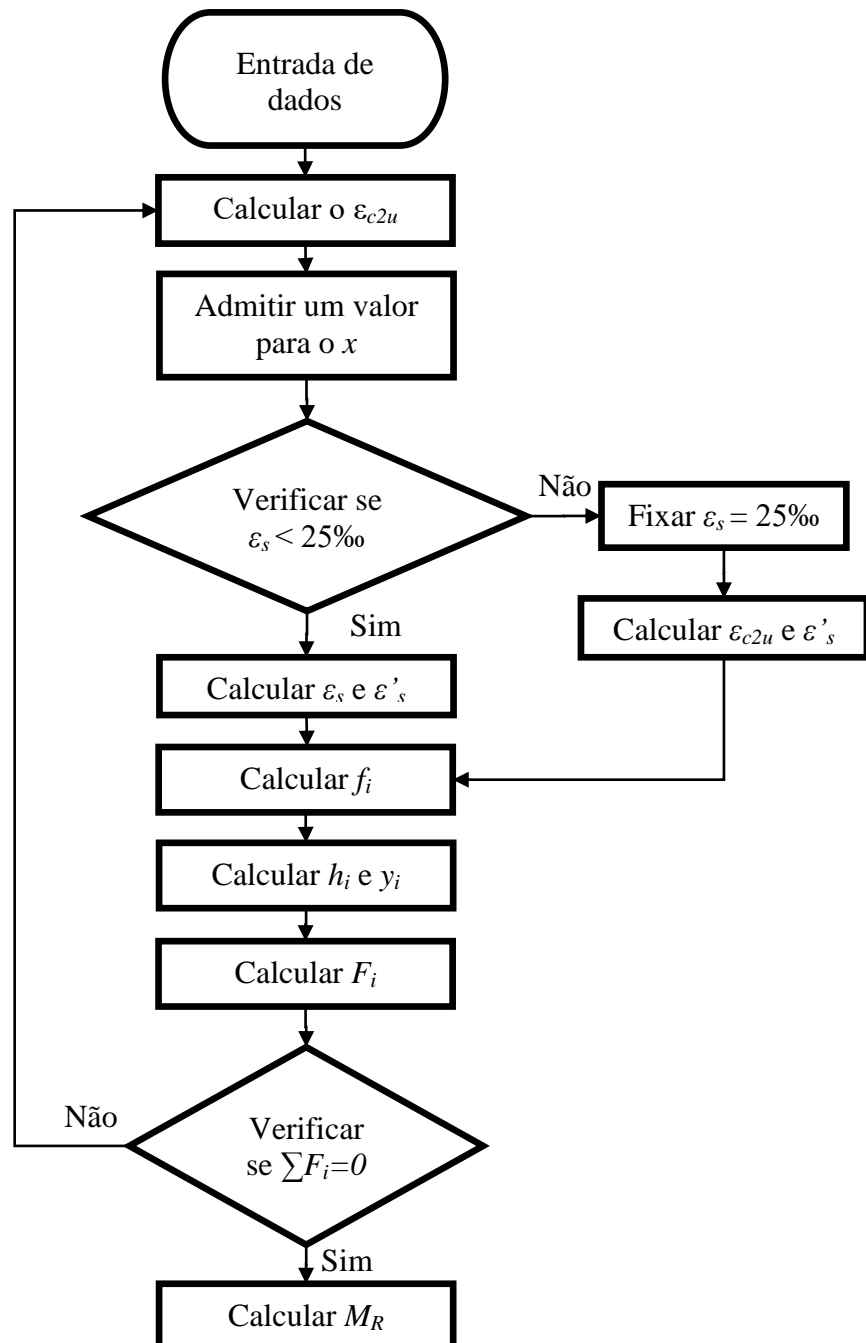


Figura 3.22 – Cálculo de  $M_R$  segundo o DAFStb (2010).

### 3.6. Considerações Adicionais

Além das informações apresentadas pelas normas, o cálculo do momento resistente  $M_R$  só é possível após se discutir alguns aspectos adicionais, como a lei constitutiva do aço das armaduras de flexão e a determinação das tensões residuais que definem a relação  $\sigma$ - $\varepsilon$  do CRFA tracionado de algumas recomendações normativas. No tocante à lei constitutiva das armaduras de flexão, apresenta-se a equação 3.42, a qual define a relação  $\sigma$ - $\varepsilon$  bilinear mostrada na figura 3.23. Ressalta-se que a referida relação é válida para ambas as armaduras, tracionadas e comprimidas.

$$\sigma_s(\varepsilon_s) = \begin{cases} \varepsilon_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s \leq f_{sy} \\ f_{sy} & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s > f_{sy} \end{cases} \quad \text{Equação 3.42}$$

Sendo  $\sigma_s$  a tensão na armadura de flexão,  $\varepsilon_s$  a deformação correspondente à  $\sigma_s$ ,  $E_s$  o módulo de elasticidade do aço das armaduras e  $f_{sy}$  a sua tensão de escoamento. Na figura 3.23,  $\varepsilon_{sy}$  é a deformação correspondente à  $f_{sy}$ .

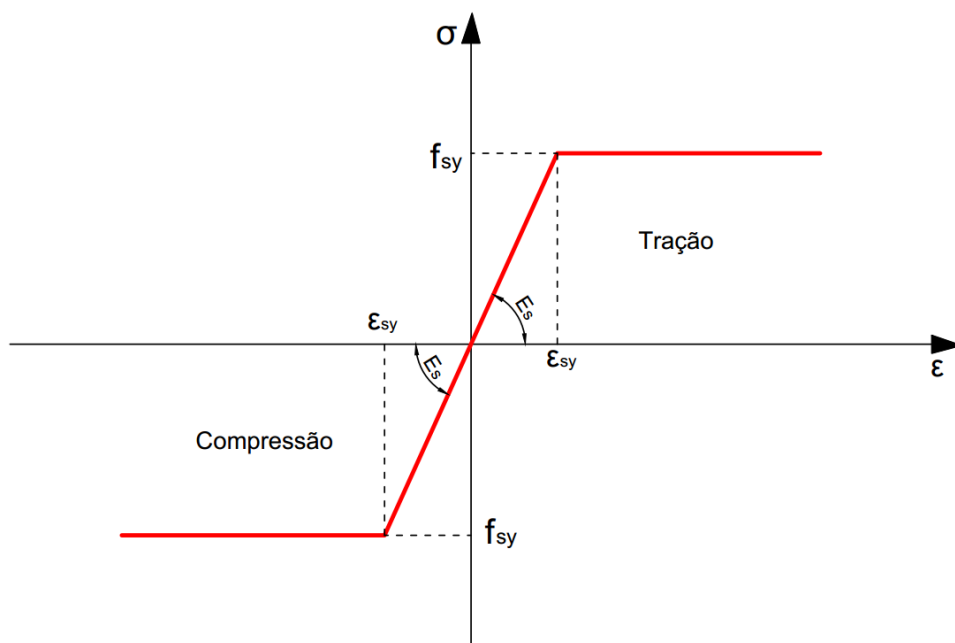


Figura 3.23 – Relação  $\sigma$ - $\varepsilon$  do aço das armaduras de flexão.

Dando continuidade, para estabelecer a lei constitutiva do CRFA tracionado do RILEM TC 162-TDF (2003) e do CEB-FIP (2010) há a necessidade de conhecer as tensões residuais  $f_{R1}$ ,  $f_{R3}$  e  $f_{R4}$ , as quais são definidas a partir do ensaio de flexão mostrado na figura 3.7. Visto que estas grandezas nem sempre são apresentadas nos trabalhos publicados na literatura técnica, inviabilizando o cálculo de  $M_R$ , MORAES NETO (2013) apresenta as

equações de 3.43 a 3.45, as quais permitem calcular os valores das tensões residuais de maneira prática.

$$f_{R1} = 7,5 \cdot \left( V_f \cdot \frac{l_f}{d_f} \right)^{0,8} \quad \text{Equação 3.43}$$

$$f_{R3} = 6,0 \cdot \left( V_f \cdot \frac{l_f}{d_f} \right)^{0,7} \quad \text{Equação 3.44}$$

$$f_{R4} = 5,5 \cdot \left( V_f \cdot \frac{l_f}{d_f} \right)^{0,65} \quad \text{Equação 3.45}$$

Ressalta-se que as equações anteriores foram estabelecidas para atender às considerações de projeto (conduz a resultados conservadores) de concretos com fibras de aço do tipo *hooked end* e com comportamento predominantemente *softening*.

Por fim, o cálculo de  $M_R$  segundo o DAfStb (2010) só é possível se a tensão  $f_{ctR,u}^f$  for conhecida. Como esta tensão é função da tensão  $f_{cfL,L2}^f$ , que é obtida a partir do ensaio de flexão mostrado na figura 3.20, MONDO (2011) apresenta a equação 3.46 para determinar o valor da tensão  $f_{ctR,u}^f$ , a qual permite estabelecer o bloco de tração do CRFA de maneira prática.

$$f_{ctR,u}^f = \left[ \min \left( 0,0186 \cdot RI; 0,0097 \cdot RI + 0,8516; \frac{1,15 \cdot 100}{f_c} \right) \right] \cdot \frac{f_c}{100} \quad \text{Equação 3.46}$$

Sendo:

$$RI = V_f \cdot l_f / d_f: \text{ índice de reforço das fibras, com } V_f \text{ em } \%$$



## 4. Revisão Bibliográfica

Neste capítulo serão apresentados trabalhos que utilizam as fibras de aço como mecanismo de reforços em vigas flexionadas de CRFA. Esses trabalhos permitirão observar como as fibras de aço influenciam no comportamento à flexão das vigas. Salienta-se que os trabalhos apresentam uma grande variedade de peças, sendo de realçar a resistências à compressão ( $f_c$ ) variando de 40 a 150 MPa, volume de fibra ( $V_f$ ) compreendendo valores de até 2%, altura útil ( $d$ ) variando de 120 a 600 mm e taxa de armadura longitudinal ( $\rho$ ) variando de 0 (sem armadura) a 3,41%. Além da abordagem experimental, apresentam-se no presente capítulo alguns modelos teóricos destinados ao cálculo do momento resistente  $M_R$ . Ressalta-se que a lei constitutiva das armaduras de flexão foi discutida anteriormente na seção 3.6, ver figura 3.23.

### 4.1. Trabalhos Experimentais Desenvolvidos

#### 4.1.1. OH (1992)

OH (1992) discutiu a influência das fibras de aço na resistência à flexão de vigas em CRFA. Para isto, o autor ensaiou 9 vigas (120 x 180 x 2000 mm<sup>3</sup>), as quais foram divididas em três grupos, como mostra a tabela 4.1. As variáveis estudadas foram o volume de fibras, que variou em 0, 1 e 2%, a taxa de armadura de flexão, que variou em 1,51, 2,36 e 3,41% e por fim, a influência da armadura de compressão. Neste estudo foram utilizadas fibras lisas com  $l_f = 40$  mm e  $d_f = 0,70$  mm ( $l_f/d_f=57$ ).

Tabela 4.1 - Vigas ensaiadas por OH (1992).

Vigas	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$V_f$ (%)	Tipo de Fibra	$l_f$ (mm)	$d_f$ (mm)	$l_f/d_f$	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	$M_{exp}$ (kN.m)
S1V0	120	180	140	40	0,00	-	-	-	-	1,51	-	12,2
S1V1	120	180	140	43	1,00	<i>lisa</i>	40	0,70	57	1,51	-	15,2
S1V2	120	180	140	48	2,00	<i>lisa</i>	40	0,70	57	1,51	-	18,0
S2V0	120	180	140	40	0,00	-	-	-	-	2,36	-	20,6
S2V1	120	180	140	43	1,00	<i>lisa</i>	40	0,70	57	2,36	-	22,6
S2V2	120	180	140	48	2,00	<i>lisa</i>	40	0,70	57	2,36	-	23,4
D2V0	120	180	140	40	0,00	-	-	-	-	3,41	0,85	26,8
D2V1	120	180	140	43	1,00	<i>lisa</i>	40	0,70	57	3,41	0,85	28,4
D2V2	120	180	140	48	2,00	<i>lisa</i>	40	0,70	57	3,41	0,85	31,0

Como principais conclusões, o autor apresentou que:

- A resistência das vigas aumentou à medida que  $V_f$  aumentava;
- A ductilidade e a capacidade de absorção de energia, ambas foram aprimoradas com a utilização das fibras;
- A eficiência das fibras foi maior nas vigas com menores taxas de armadura;
- O controle de fissuração, tanto em termos da formação, como de propagação, foi aprimorado pelas fibras de aço.

#### 4.1.2. ASHOUR *et al.* (2000)

ASHOUR *et al.* (2000) avaliou o impacto do volume de fibras  $V_f$ , variando em 0, 0,5 e 1%, da taxa de armadura de flexão  $\rho$ , variando em 1,18%, 1,77% e 2,37%, e da resistência à compressão do concreto  $f_c$ , variando entre 49 MPa e 102 MPa, no comportamento à flexão de 27 vigas em CRFA (200 x 250 x 3400 mm<sup>3</sup>). A fibra utilizada no estudo foi do tipo *hooked end*, com 60 mm de comprimento ( $l_f$ ) e 0,80 mm de diâmetro ( $d_f$ ). A tabela 4.2 apresenta um resumo das vigas ensaiadas pelos pesquisadores.

Tabela 4.2 - Vigas ensaiadas por ASHOUR *et al.* (2000).

Vigas	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$V_f$ (%)	Tipo de Fibra	$l_f$ (mm)	$d_f$ (mm)	$l_f/d_f$	$\rho$ (%)	$M_{exp}$ (kN.m)
B-0.0-N2	200	250	215	49	0,00	-	-	-	-	1,18	58,2
B-0.5-N2	200	250	215	56	0,50	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	1,18	60,2
B-1.0-N2	200	250	215	65	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	1,18	64,5
B-0.0-N3	200	250	215	49	0,00	-	-	-	-	1,78	77,1
B-0.5-N3	200	250	215	56	0,50	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	1,78	83,8
B-1.0-N3	200	250	215	65	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	1,78	87,7
B-0.0-N4	200	250	215	49	0,00	-	-	-	-	2,37	98,4
B-0.5-N4	200	250	215	56	0,50	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	2,37	103,1
B-1.0-N4	200	250	215	65	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	2,37	105,8
B-0.0-M2	200	250	215	79	0,00	-	-	-	-	1,18	55,3
B-0.5-M2	200	250	215	82	0,50	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	1,18	63,3
B-1.0-M2	200	250	215	87	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	1,18	69,9

Tabela 4.2 - Vigas ensaiadas por ASHOUR *et al.* (2000) (Continuação).

Vigas	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$V_f$ (%)	Tipo de Fibra	$l_f$ (mm)	$d_f$ (mm)	$l_f/d_f$	$\rho$ (%)	$M_{exp}$ (kN.m)
B-0.0-M3	200	250	215	79	0,00	-	-	-	-	1,78	80,9
B-0.5-M3	200	250	215	82	0,50	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	1,78	89,6
B-1.0-M3	200	250	215	87	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	1,78	92,1
B-0.0-M4	200	250	215	79	0,00	-	-	-	-	2,37	103,8
B-0.5-M4	200	250	215	82	0,50	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	2,37	113,6
B-1.0-M4	200	250	215	87	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	2,37	115,7
B-0.0-H2	200	250	215	102	0,00	-	-	-	-	1,18	55,9
B-0.5-H2	200	250	215	107	0,50	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	1,18	62,6
B-1.0-H2	200	250	215	111	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	1,18	69,3
B-0.0-H3	200	250	215	102	0,00	-	-	-	-	1,78	82,8
B-0.5-H3	200	250	215	107	0,50	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	1,78	89,8
B-1.0-H3	200	250	215	111	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	1,78	95,6
B-0.0-H4	200	250	215	102	0,00	-	-	-	-	2,37	108,1
B-0.5-H4	200	250	215	107	0,50	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	2,37	115,0
B-1.0-H4	200	250	215	111	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,80	75	2,37	120,6

ASHOUR *et al.* (2000) concluíram que a adição de fibras de aço à massa de concreto aumentou sensivelmente a tenacidade e a ductilidade das peças, o momento de inércia fissurado, o momento correspondente ao escoamento da armadura e o momento último das vigas. Adicionalmente, os autores comentam que os benefícios das fibras independem da taxa de armadura longitudinal ( $\rho$ ) existente, e que o ganho de resistência à flexão gerada pela fibra é proporcional à resistência à compressão ( $f_c$ ) do CRFA.

#### 4.1.3. DANCYGIER e SAVIR (2006)

DANCYGIER e SAVIR (2006) avaliaram a influência da fibra de aço em vigas com concreto de alta resistência ( $f_c > 115$  MPa) com baixa taxa de armadura longitudinal. Para este fim, os autores avaliaram 11 vigas (200 x 300 x 3900 mm<sup>3</sup>), as quais tiveram como variáveis: a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ), que variou entre 45 e 129 MPa, a taxa de armadura de flexão ( $\rho$ ), que variou em 0,18; 0,28 e 0,56%, o volume de fibras  $V_f$ , que variou entre 0 e 0,75% e o tipo de fibra, RC-65/35-BN e RC-65/60-BN. O resumo das vigas é apresentado na tabela 4.3.

Tabela 4.3 - Vigas ensaiadas por DANCYGIER e SAVIR (2006).

Vigas	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$V_f$ (%)	Tipo de Fibra	$l_f$ (mm)	$d_f$ (mm)	$l_f/d_f$	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	$M_{exp}$ (kN.m)
N2-F2-0_1	200	300	273	45	0,00	-	-	-	-	0,18	0,18	18,2
N2-F2-0_2	200	300	273	45	0,00	-	-	-	-	0,18	0,18	16,7
H4-F2-0_1	200	300	273	121	0,00	-	-	-	-	0,28	0,18	38,7
H4-F2-0_2	200	300	273	115	0,00	-	-	-	-	0,28	0,18	35,9
H5-F2-1_35	200	300	273	129	0,75	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,28	0,18	35,6
H5-F2-1_60	200	300	273	124	0,75	<i>hooked end</i>	60	0,90	67	0,28	0,18	41,0
H8-F2-1_35	200	300	273	124	0,75	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,56	0,18	58,3
H8-F2-1_60	200	300	273	122	0,75	<i>hooked end</i>	60	0,90	67	0,56	0,18	55,8
H4-F2-0_4	200	300	273	118	0,00	-	-	-	-	0,28	0,18	28,9
H5-F2-1_35_3	200	300	273	122	0,75	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,28	0,18	35,1
H5-F2-1_35_4	200	300	273	122	0,75	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,28	0,18	33,8

Os autores constataram que a utilização de fibras de aço em vigas de concreto de alta resistência e reforçadas com baixas taxas de armadura conferiram:

- Acréscimos discretos na resistência;
- Redução no deslocamento vertical (flecha);
- Redução na ductilidade (esta propriedade só foi aprimorada aumentando a taxa de armadura de flexão).

DANCYGIER e SAVIR (2006) complementam sugerindo evitar taxas de armadura de flexão baixas em vigas de concreto de alta resistência reforçadas com fibras de aço, ou seja, os autores recomendam que a taxa de armadura de flexão mínima para este tipo de viga seja superior à taxa de armadura mínima de vigas em concreto de resistência normal reforçadas com fibras de aço.

#### 4.1.4. MONTAIGNAC *et al.* (2011)

MONTAIGNAC *et al.* (2011) analisaram a influência das fibras de aço no comportamento de vigas flexionadas ensaiando 21 vigas em CRFA, sendo 19 com seção transversal retangular e 2 com seção  $T$ . As variáveis do estudo foram: a dimensão da seção transversal, o volume de fibras, o fator de forma e a taxa de armadura de flexão, ver tabela 4.4. O vão  $L$  das vigas foi igual 8 vezes a sua altura  $h$  e o ponto de aplicação da carga  $a$  (ensaio em 4

pontos) igual a 2 vezes a sua altura  $h$ . No estudo, foram utilizados dois tipos de fibras *hooked end*, RC 80/60, com  $l_f=60$  mm e  $d_f=0,75$  mm, e RC 65/35, com  $l_f=35$  mm e  $d_f=0,55$  mm.

Tabela 4.4 - Vigas ensaiadas por MONTAIGNAC *et al.* (2011).

Vigas	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$V_f$ (%)	Tipo de Fibra	$l_f$ (mm)	$d_f$ (mm)	$l_f/d_f$	$\rho$ (%)	$M_{exp}$ (kN.m)
R150R/HSC	400	150	120	52	0,00	-	-	-	-	0,42	69,7
R150F/F60-1.0	400	150	-( <sup>1</sup> )	63	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,75	80	0,00	11,7
R150F/F35-1.0	400	150	-( <sup>1</sup> )	47	1,00	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,00	10,0
R300R/HSC	400	300	250	52	0,00	-	-	-	-	0,40	103,9
R300F/F60-1.0	400	300	-( <sup>1</sup> )	63	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,75	80	0,00	33,9
R300F/F35-1.0	400	300	-( <sup>1</sup> )	47	1,00	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,00	24,9
R600R/HSC	500	600	540	52	0,00	-	-	-	-	0,37	247,8
R600F/F60-0.75	500	600	-( <sup>1</sup> )	58	0,75	<i>hooked end</i>	60	0,75	80	0,00	139,7
R600F/F60-1.0	500	600	-( <sup>1</sup> )	63	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,75	80	0,00	142,3
R600F/F35-1.0	500	600	-( <sup>1</sup> )	47	1,00	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,00	153,9
R600F/F35-1.25	500	600	-( <sup>1</sup> )	56	1,25	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,00	163,6
R150RF/F60-1.0	400	150	120	63	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,75	80	0,42	20,0
R150RF/F35-1.0	400	150	120	47	1,00	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,42	18,3
R300RF/F60-1.0	400	300	250	63	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,75	80	0,40	73,2
R300RF/F35-1.0	400	300	250	47	1,00	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,40	65,7
R600RF/F60-0.75	500	600	540	58	0,75	<i>hooked end</i>	60	0,75	80	0,37	332,8
R600RF/F60-1.0	500	600	540	63	1,00	<i>hooked end</i>	60	0,75	80	0,37	334,6
R600RF/F35-1.0	500	600	540	47	1,00	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,37	333,0
R600RF/F35-1.25	500	600	540	56	1,25	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,37	351,5
T500RF/F35-1.0T P	400	500	470	47	1,00	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,15	209,9
T500RF/F35-1.0T N	400	500	470	47	1,00	<i>hooked end</i>	35	0,55	64	0,15	251,4

(<sup>1</sup>) – Peça sem armadura de flexão.

Ao fim do estudo foi concluído que a aplicação de fibras, com  $V_f$  variando entre 0,75% e 1,15%, permite melhorar significativamente o comportamento estrutural das vigas. Aprimorando, além do controle da fissuração, também a ductilidade. Entretanto, ressalta-se que as vigas dos autores não foram solicitadas até a ruína, mas sim até o momento em que foi registrado perda de carga.

#### 4.1.5. KHALIL e TAYFUR (2013)

KHALIL e TAYFUR (2013) avaliaram a influência das fibras de aço no comportamento à flexão de 11 vigas (150 x 150 x 1950) mm<sup>3</sup> com resistência à compressão de até 150 MPa.

Para este fim, foram utilizados dois tipos de fibras, *hooked end* e *crimped*, onde  $V_f$  variou em 0,5; 0,75 e 1% (ver tabela 4.5). Além disso, é importante salientar que as vigas foram concretadas de duas formas distintas, um grupo de vigas foram completamente reforçadas com fibras, enquanto o grupo restante foi reforçado até meia altura da peça  $h/2$  (zona tracionada).

Tabela 4.5 - Vigas ensaiadas por KHALIEL e TAYFUR (2013).

Vigas	$f_c$ (MPa)	$V_f$ (%)	Tipo de Fibra	Profundidade de inclusão de fibra	$l_f$ (mm)	$d_f$ (mm)	$l_f/d_f$	$\rho$ (%)	$M_{exp}$ (kN.m)
D250V0	137	-	-	-	-	-	-	0,72	23,7
D250V0.5H	140	0,50	<i>hooked end</i>	Seção completa	30	0,60	50	0,72	25,2
D250V0.5C	144	0,50	<i>crimped</i>	Seção completa	30	0,60	50	0,72	24,6
D250V0.75H	141	0,75	<i>hooked end</i>	Seção completa	30	0,60	50	0,72	27,6
D250V0.75C	143	0,75	<i>crimped</i>	Seção completa	30	0,60	50	0,72	25,8
D250V1H	146	1,00	<i>hooked end</i>	Seção completa	30	0,60	50	0,72	29,1
D250V1C	149	1,00	<i>crimped</i>	Seção completa	30	0,60	50	0,72	30,0
D250V0.5H	138	0,50	<i>hooked end</i>	Metade da seção	30	0,60	50	0,72	24,3
D250V0.5C	142	0,50	<i>crimped</i>	Metade da seção	30	0,60	50	0,72	24,6
D250V0.75H	140	0,75	<i>hooked end</i>	Metade da seção	30	0,60	50	0,72	26,7
D250V0.75C	144	0,75	<i>crimped</i>	Metade da seção	30	0,60	50	0,72	28,8

Os autores concluíram que o mecanismo de reforço proporcionado pelas fibras aumentou entre 20 e 30% o momento resistente das vigas ( $V_f = 1\%$ ), sendo mais aprimorada a resiliência, que apresentou acréscimos de aproximadamente 35% para o  $V_f$  variando entre 0,75 e 1%. No que diz respeito ao grupo de vigas reforçadas a meia altura,  $h/2$ , foram verificados acréscimos de momentos semelhantes aos encontrados para as vigas completamente reforçadas. Por fim, os autores comentam que o tipo de fibras, *hooked end* e *crimped*, não influenciou significativamente no padrão de comportamento das vigas

## 4.2. Modelos Teóricos para o Cálculo de $M_R$

### 4.2.1. LOK e PEI (1998)

LOK e PEI (1998) apresentaram o modelo de flexão exibido na figura 4.1, o qual foi desenvolvido exclusivamente para analisar vigas em CRFA sem armadura convencional (barras de aço). Entretanto, nesse trabalho, serão utilizadas as leis constitutivas propostas pelos autores para avaliar vigas em CRFA reforçadas também com armaduras convencionais.

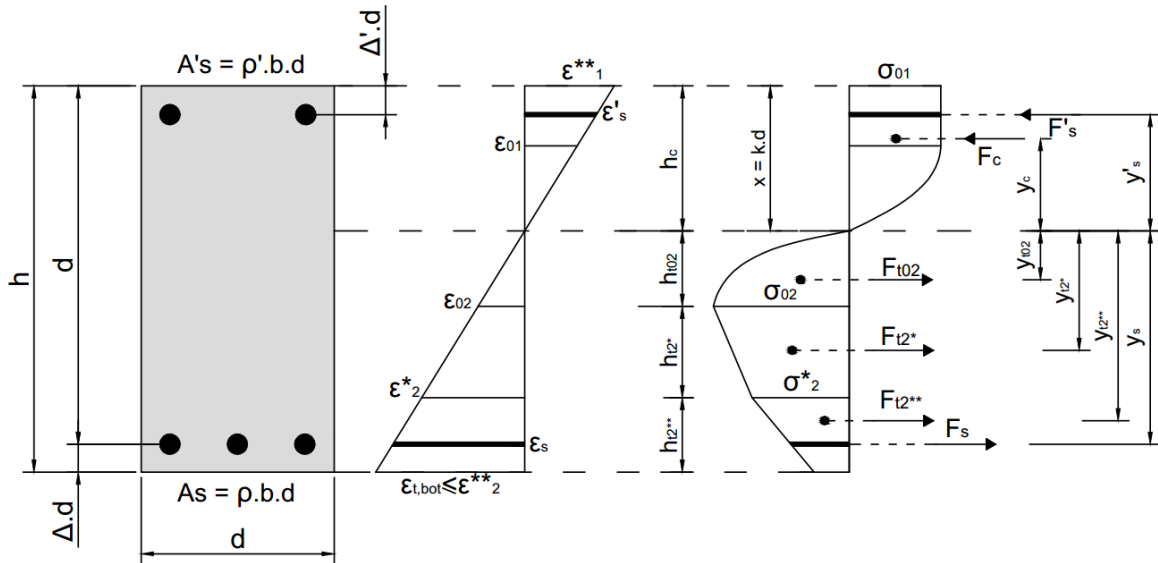


Figura 4.1 – Modelo de flexão proposto por LOK e PEI (1998).

A lei constitutiva que descreve o comportamento do concreto comprimido é apresentada na figura 4.2 e na equação 4.1.

$$\sigma_1(\varepsilon) = \sigma_{01} - \frac{\sigma_{01}}{(\varepsilon_{01})^2} \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_{01})^2 \quad \text{Equação 4.1}$$

Sendo:

$\sigma_1$ : tensão de compressão;

$\varepsilon_1$ : deformação de compressão;

$\sigma_{01} = 0,67 \cdot f_{cu}$ : tensão última de compressão. Onde  $f_{cu}$  é a resistência à compressão do concreto obtido no ensaio de corpos de provas cúbicos;

$\varepsilon_{01} = 2,4 \cdot 10^{-4} \sqrt{f_{cu}}$ : deformação correspondente à tensão  $\sigma_{01}$ .

Na figura 4.2, a grandeza  $\varepsilon_1^{**}$  corresponde à deformação última do concreto reforçado com fibras de aço, a qual os autores consideram apropriado assumir o valor de 3,5%.

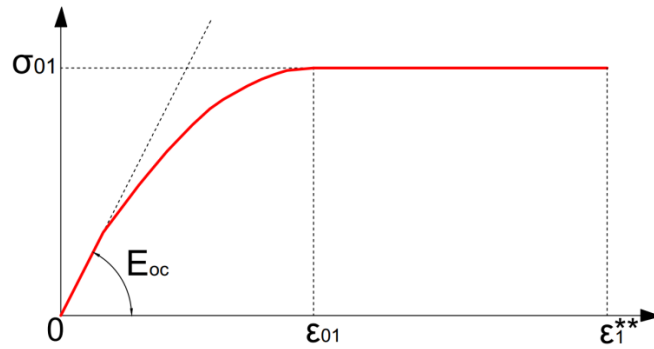


Figura 4.2 – Relação *tensão x deformação* do CRFA comprimido (LOK e PEI ,1998).

No que diz respeito à relação *tensão-deformação* do CRFA tracionado, os autores apresentam as curvas da figura 4.3, a qual pode assumir comportamento *softening* e *hardening*. Nesta figura, a tensão  $\sigma_2$  de tração é definida por:

$$\sigma_2(\varepsilon) = \sigma_{02} - \frac{\sigma_{02}}{(\varepsilon_{02})^2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_{02})^2 \quad \text{Equação 4.2}$$

Sendo:

$\varepsilon_2$ : deformação de tração;

$\sigma_{02} = f_t$ : resistência à tração direta no concreto. Os autores admitem  $f_t = 0,1 \cdot f_{cu}$ , porém, será adotado neste trabalho as recomendações do CEB-FIP (2010);

$\varepsilon_{02} = \varepsilon_{01}/\sigma_{01} \cdot \sigma_{02}$ : deformação correspondente a  $\sigma_{02}$ .

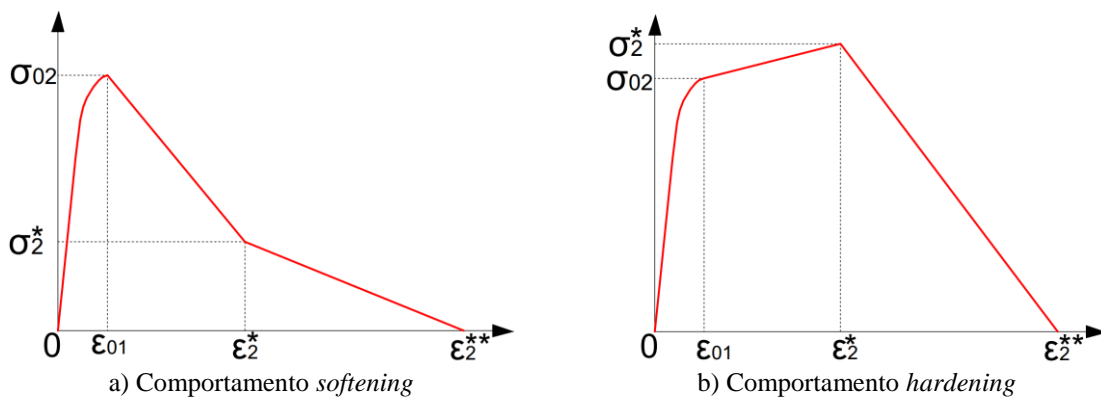


Figura 4.3 – Relação *tensão x deformação* do CRFA tracionado (LOK e PEI ,1998).



Na figura 4.3, a deformação  $\varepsilon_2^{**} = 20\%$  corresponde à deformação última à tração do CRFA. Além disso, ressalta-se que a tensão residual  $\sigma_2^*$  e a sua correspondente deformação  $\varepsilon_2^*$  são dadas como segue:

$$\sigma_2^* = \frac{1}{2} \cdot V_f \cdot \tau_d \cdot \frac{l_f}{d_f} \quad \text{Equação 4.3}$$

$$\varepsilon_2^* = \tau_d \frac{l_f}{d_f \cdot E_{fp}} \quad \text{Equação 4.4}$$

Onde:

$\tau_d$ : tensão de aderência *fibra-matriz*. Na falta de dados experimentais, os autores recomendam adotar  $\tau_d = 3,5 \text{ MPa}$ ;

$E_{fp}$ : módulo de elasticidade das fibras de aço.

O cálculo do momento resistente  $M_R$  da seção apresentada na figura 4.4 é dado por um processo iterativo, onde inicialmente se estabelece a compatibilização das deformações e o equilíbrio das resultantes de força,  $\sum F=0$ . Feito isso, o valor de  $M_R$  é dado como segue:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i \quad \text{Equação 3.6}$$

Onde:

$F_i$ : resultante das forças ( $F_c, F_{t02}, F_{t2^*}, F_{t2^{**}}, F_s$  e  $F'_s$ ), ver figura 4.1;

$y_i$ : distância entre as resultantes e a linha neutra da seção, ver figura 4.1.

#### 4.2.2. CHOI *et al.* (2007)

O modelo de flexão proposto por CHOI *et al.* (2007) é apresentado na figura 4.4. Esse modelo foi originalmente utilizado para estabelecer a resistência à punção de lajes em CRFA. Entretanto, neste trabalho, utilizam-se as leis constitutivas estabelecidas pelos autores, as quais definem o comportamento do concreto com fibras comprimido e tracionado, para avaliar o momento resistente de vigas em CRFA.

No que diz respeito à relação  $\sigma$ - $\varepsilon$  do CRFA comprimido, a análise da figura 4.5 deixa claro que as fibras de aço influenciam o padrão de comportamento em todos os estágios do processo. Nessa figura, as grandezas  $f'_c$  e  $\varepsilon_{co}$  representam, respectivamente, a resistência à compressão do concreto sem fibras e a sua deformação correspondente. Os valores de  $f'_{cf}$ , resistência à compressão do CRFA, e  $\varepsilon_{cof}$ , deformação correspondente à  $f'_{cf}$ , são dados como segue:

$$f'_{cf} = 1,9 \cdot V_f \cdot \frac{l_f}{d_f} \cdot \beta + f'_c \text{ (MPa)} \quad \text{Equação 4.5}$$

$$\varepsilon_{cof} = 0,00079 \cdot V_f \cdot \frac{l_f}{d_f} + 0,0041 \cdot \frac{f'_{cf}}{f'_c} \quad \text{Equação 4.6}$$

Sendo:

$\beta$ : fator que leva em consideração o tipo de fibra utilizada. Os autores assumem  $\beta = 1,0$  para fibras do tipo *hooked end* ou *crimped*,  $\beta = 2/3$  para fibras lisas ou com seção transversal circular aplicada em concretos normais (peso específico), e  $\beta = 3/4$  para fibras do tipo *hooked end* ou *crimped* aplicadas em concreto leve. No que diz respeito à deformação  $\alpha \cdot \varepsilon_{cof}$ , ver figura 4.4, adotou-se neste trabalho o valor de 3,5%.

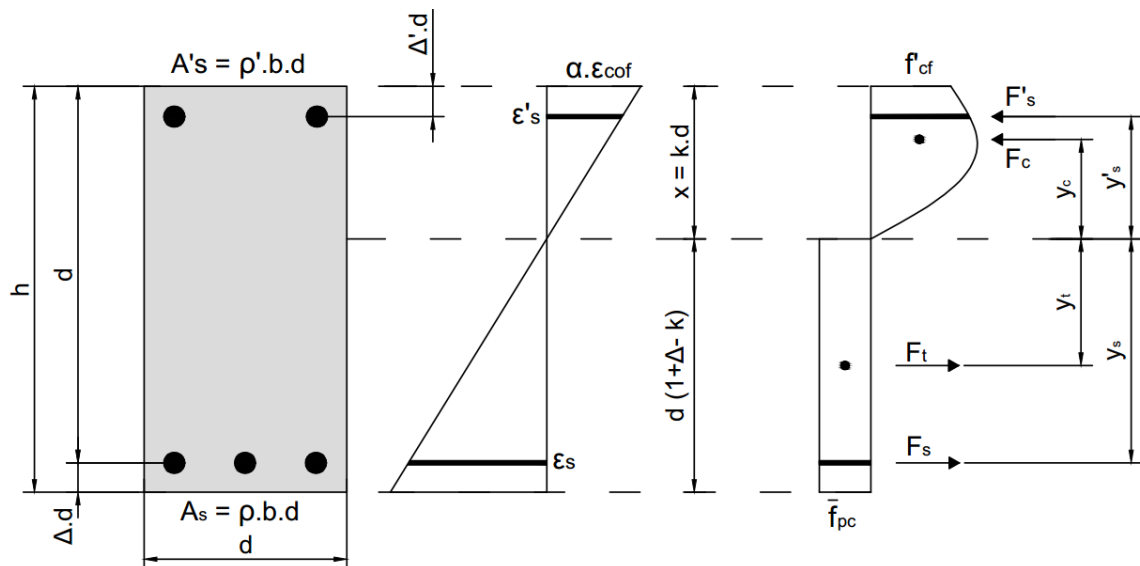


Figura 4.4 – Modelo de flexão proposto por CHOI *et al.* (2007).

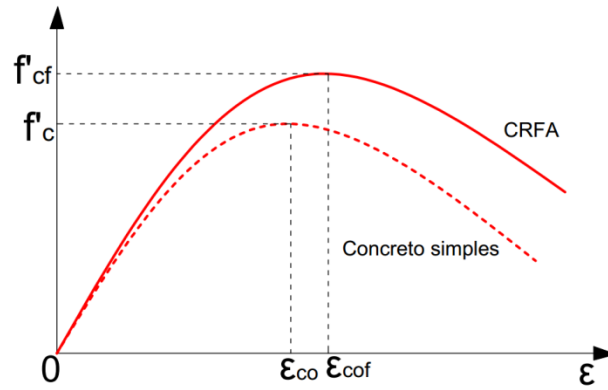


Figura 4.5 – Relação *tensão-deformação* do CRFA comprimido (CHOI *et al.*, 2007).  
A expressão que define a lei constitutiva mostrada na figura 4.5, concreto comprimido, é dada a seguir:

$$\sigma_c(\varepsilon) = f'_{cf} \cdot \left[ 2 \cdot \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cof}} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cof}} \right)^2 \right] \quad \text{Equação 4.7}$$

A relação  $\sigma$ - $\varepsilon$  do concreto com fibras tracionado proposta por CHOI *et al.* (2007) é mostrada na figura 4.6. Entretanto, no presente trabalho adotou-se a abordagem simplificada, definida pelos autores a partir da resistência residual média  $\overline{f_{pc}}$  (bloco de tração mostrado na figura 4.6), a qual é dada por:

$$\overline{f_{pc}} = 0,6 \cdot f_{pc} \quad \text{Equação 4.7}$$

Onde:

$f_{pc}$ : resistência à tração pós-fissura, ver figura 4.6, a qual é definida como segue:

$$f_{pc} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot V_f \cdot \frac{l_f}{d_f} \cdot \tau \cdot \beta \quad \text{Equação 4.8}$$

Sendo:

$\tau = 2 \cdot f_t$ : resistência interfacial (aderência) *fibra-concreto*. Nesta expressão,  $f_t = 0,292 \cdot \sqrt{f'_c}$  (MPa), representa a resistência à tração direta do concreto sem fibras;

$\lambda_1 = 0,25$ : fator que considera a taxa esperada para o comprimento de arrancamento (*pull-out*) das fibras;

$\lambda_2 = 1,2$ : fator que considera a orientação das fibras no estágio fissurado do concreto;

$\lambda_3 = 1,0$ : fator de redução que considera o efeito de grupos de fibras arrancadas do concreto (*pull-out*) por unidade de área.

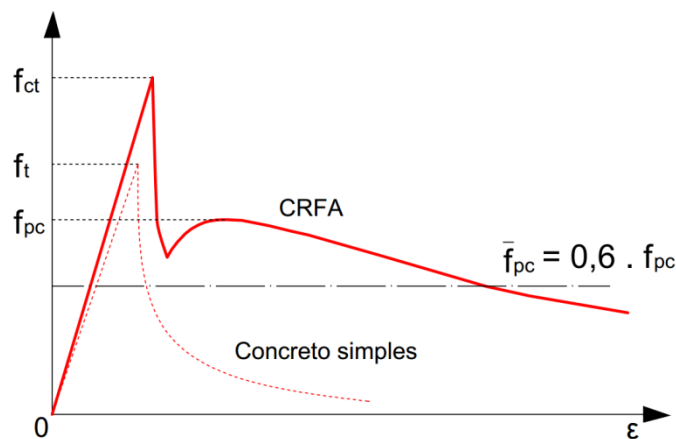


Figura 4.6 – Relação *tensão-deformação* do CRFA tracionado (CHOI *et al.*, 2007).

Para finalizar, o cálculo do momento resistente  $M_R$  é estabelecido pela equação 4.9, a qual é aplicada após ser alcançada (processo iterativo) a compatibilização das deformações e o equilíbrio das resultantes de força, ver figura 4.4.

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i \quad \text{Equação 4.9}$$

Onde:

$F_i$ : resultante das forças ( $F_c$ ,  $F_t$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ), ver figura 4.4;

$y_i$ : distância entre as resultantes e a linha neutra da seção, ver figura 4.4.

#### 4.2.3. SORANAKOM e MOBASCHER (2007)

O modelo de flexão proposto por SORANAKOM e MOBASCHER (2007) é mostrado na figura 4.8. Ressalta-se que o modelo dos autores utiliza a lei constitutiva de LIM *et al.*

(1987) para o CRFA tracionado para estabelecer as relações *momento-curvatura* e *carga-deslocamento* de vigas em CRFA. Como a grande contribuição dos autores é a lei  $\sigma$ - $\varepsilon$  do concreto tracionado, a lei para o concreto comprimido será estabelecida seguindo as recomendações do CEB-FIP (2010), ver figura 3.4.

Para discutir a relação *tensão-deformação* do CRFA tracionado, apresenta-se a figura 4.7. Nessa figura, o ponto correspondente ao início da fissuração ( $\sigma_{cr}=f_{ctm}, \varepsilon_{cr}=\sigma_{cr}/E_c$ ) é definido segundo o CEB-FIP (2010). A tensão residual última  $\sigma_{tu}$  e a deformação última  $\varepsilon_{tu}$  são definidos como segue:

$$\sigma_{tu} = \eta_l \cdot \eta'_0 \cdot V_f \cdot l_f \cdot \frac{\tau_u}{2 \cdot r} \quad \text{Equação 4.10}$$

$$\varepsilon_{tu} = \frac{W_u}{S_{rm}} \quad \text{Equação 4.11}$$

Sendo:

$\eta_l$ : fator de eficiência do comprimento da fibra, o qual leva em conta a variação das tensões no extremo das fibras. O valor de  $\eta_l$  é dado por:

$$\eta_l = \begin{cases} 0,5 & \text{para } l_f \leq l_c \\ 1 - \frac{l_c}{2 \cdot l_f} & \text{para } l_f > l_c \end{cases} \quad \text{Equação 4.12}$$

$l_c = 0,5 \cdot \sigma_{fu} \cdot d_f / \tau_u$ : comprimento crítico das fibras, que representa o comprimento necessário para que a tensão última da fibra  $\sigma_{fu}$  seja alcançada quando se admite uma tensão de aderência última uniforme  $\tau_u$  na interface *fibra-matriz*;

$\eta'_0 = 0,405$  para  $(b, h) > l_f$ : fator que leva em conta a orientação das fibras (proposta de ROMUALDI e MANDEL, 1964);

$\tau_u$ : tensão de aderência última na interface *fibra-matriz*. Neste trabalho se adotou  $\tau_u = 3,5$  MPa na ausência de resultados experimentais;

$r$ : razão entre a área da seção transversal e o perímetro das fibras;

$w_u = l_f/16$ : abertura da fissura correspondente à  $\epsilon_{tu}$ ;

$s_{rm}$ : na flexão de vigas corresponde à distância média entre fissuras. Segundo PEDERSEN (1996), admitir  $s_{rm} = d/2$  conduz a resultados satisfatórios.

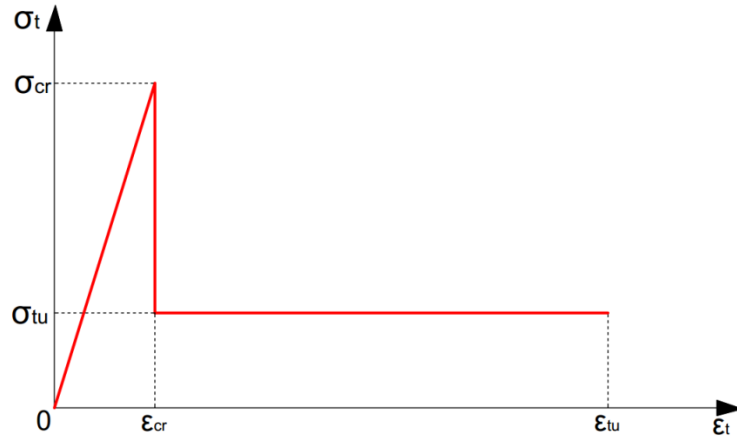


Figura 4.7 – Relação *tensão-deformação* do CRFA tracionado (LIM *et al.*, 1987).

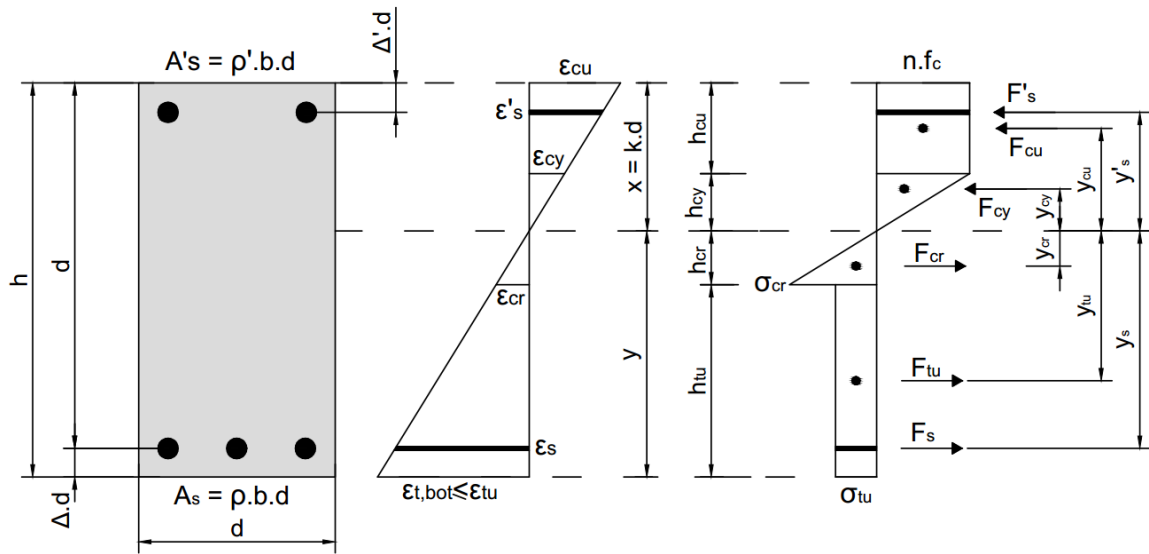


Figura 4.8 – Modelo de flexão proposto por SORANAKOM e MOBASCHER (2007).

O cálculo do momento resistente  $M_R$  da viga apresentada na figura 4.8 acontece de forma iterativa, após a compatibilização das deformações  $\epsilon$  e o equilíbrio das resultantes de força ( $\sum F=0$ ), como segue:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i \quad \text{Equação 3.13}$$

Onde:

$F_i$ : resultante das forças ( $F_{cu}$ ,  $F_{cy}$ ,  $F_{cr}$ ,  $F_{tu}$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ), ver figura 4.8;

$y_i$ : distância entre as resultantes e a linha neutra da seção, ver figura 4.8.

#### 4.2.4. MAYA *et al.* (2012)

O modelo de flexão proposto pelos autores é apresentado na figura 4.9. Nesse modelo, adotou-se analisar o bloco de compressão do concreto segundo as recomendações do CEB-FIP (2010) e para o bloco de tração, MAYA *et al.* (2012) sugere analisar a tensão residual  $f_{ct2,f}(w_2)$ , como segue:

$$f_{ct2,f}(w_2) = K_f(w_2) \cdot \alpha_f \cdot V_f \cdot \tau_b \quad \text{Equação 4.14}$$

Sendo:

$\alpha_f = l_f/d_f$ : fator de forma;

$\tau_b = k_b \cdot \sqrt{f_c}$ : tensão de aderência interfacial *fibra-concreto*;

$k_b$ : fator de aderência. Os autores sugerem  $k_b = 0,8$  para fibras do tipo *hookend end*,  $k_b = 0,6$  para fibras do tipo *crimped* e  $k_b = 0,4$  para fibras lisas;

$K_f(w_2)$ : fator de orientação global das fibras, definido por:

$$K_f = \frac{1}{\pi} \arctang \left( \alpha_e \frac{w}{d_f} \right) \left( 1 - \frac{2w}{l_f} \right)^2 \quad \text{Equação 4.15}$$

$\alpha_e = 3,5$  MPa: parâmetro de consolidação (*engagement parameter*);

$w_2 = 3,0$  mm: abertura da fissura correspondente à tensão  $f_{ct2,f}$ .

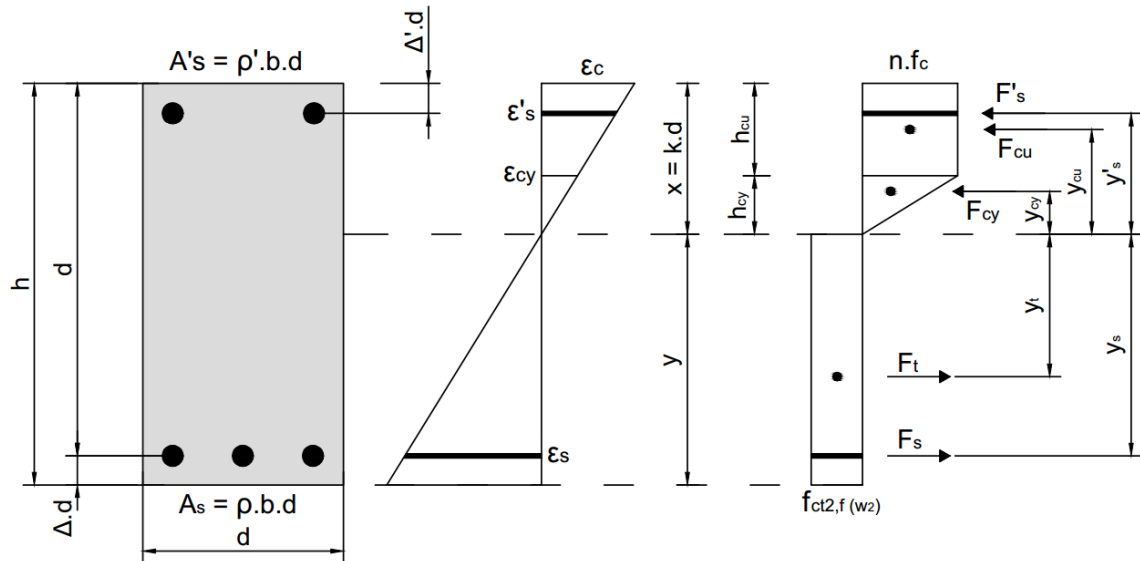


Figura 4.9 – Modelo de flexão proposto por MAYA *et al.* (2012).

Por fim, o valor do momento resistente  $M_R$  é estabelecido, ver equação 4.16, após processo iterativo que compatibiliza a distribuição linear das deformações e equilibra as resultantes de força ( $F_{cu}$ ,  $F_{cy}$ ,  $F_t$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ).

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i \quad \text{Equação 4.16}$$

Onde:

$F_i$ : resultante das forças ( $F_{cu}$ ,  $F_{cy}$ ,  $F_t$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ), ver figura 4.9;

$y_i$ : distância entre as resultantes e a linha neutra da seção, ver figura 4.9.

#### 4.2.5. ZIJL e MBEWE (2013)

O modelo de flexão proposto por ZIJL e MBEWE (2013) é apresentado na figura 4.10 e as premissas que definem os blocos de compressão e de tração são discutidas nas figuras 4.11 e 4.12. Ressalta-se que a lei constitutiva adotada pelos autores para definir o CRFA tracionado é fundamentada nos estudos de LIM *et al.* (1987). No que diz respeito ao bloco de compressão, têm-se para os parâmetros  $\eta_c$  e  $\lambda_c$  os seguintes valores:

$$\lambda_c = \frac{2 \cdot (\omega^2 - 3\omega + 3)}{3 \cdot (2 - \omega)} \quad \text{Equação 4.17}$$



$$\eta_c = \frac{3 \cdot (2 - \omega^2)}{4 \cdot (\omega^2 - 3\omega + 3)} \quad \text{Equação 4.18}$$

Sendo  $\omega$  dado por:

$$\omega = \frac{\varepsilon_{cy}}{\varepsilon_c} \quad \text{Equação 4.19}$$

Na equação de  $\omega$ , a deformação  $\varepsilon_{cy}$  será calculada segundo o CEB-FIP (2010) e  $\varepsilon_c$  representa a deformação na fibra mais comprimida da seção, ver figura 4.10, a qual é definida após o processo iterativo que compatibiliza a distribuição das deformações. Analogamente, para definir o bloco de tração, têm-se os parâmetros  $\eta_t$  e  $\lambda_t$ , como segue:

$$\eta_t = \frac{3 \cdot [\omega' \cdot (1 - 2 \cdot \mu_i) + 2 \cdot \mu_i]^2}{4 \cdot [\omega'^2 \cdot (3 \cdot \mu_i - 2) + 3 \cdot \omega' \cdot (1 - 2 \cdot \mu_i) + 3 \cdot \mu_i]} \quad \text{Equação 4.20}$$

$$\lambda_t = \frac{2 \cdot [\omega'^2 \cdot (3 \cdot \mu_i - 2) + 3 \cdot \omega' \cdot (1 - 2 \cdot \mu_i) + 3 \cdot \mu_i]}{3 \cdot [\omega' \cdot (1 - 2 \cdot \mu_i) + 2 \cdot \mu_i]} \quad \text{Equação 4.21}$$

Sendo  $\omega'$  dado por:

$$\omega' = \frac{\varepsilon_{ty}}{\varepsilon_t} \quad \text{Equação 4.22}$$

Nessa equação, a deformação  $\varepsilon_{ty}$  corresponde à deformação  $\varepsilon_{cr} = \sigma_{cr}/E_c$  e  $\varepsilon_t = \varepsilon_s$  representa a deformação no nível da armadura de flexão, ver figura 4.10, a qual é definida após a compatibilização das deformações (processo iterativo). Nas equações de  $\eta_t$  e  $\lambda_t$  o parâmetro  $\mu_i$  é dado como segue:

$$\mu_i = \frac{\sigma_{tu}}{\sigma_{cr}} \quad \text{Equação 4.23}$$

Onde:

$\sigma_{cr} = f_{ctm}$ : resistência do concreto à tração, a qual será calculada neste trabalho segundo o CEB-FIP (2010);

$\sigma_{tu}$ : tensão residual última, a qual é definida segundo as recomendações de LIM *et al.* (1987), como apresenta a equação 4.24. As grandezas envolvidas nesta equação foram discutidas na seção 4.3.3.

$$\sigma_{tu} = \eta_l \cdot \eta'_0 \cdot V_f \cdot l_f \cdot \frac{\tau_u}{2 \cdot r} \quad \text{Equação 4.24}$$

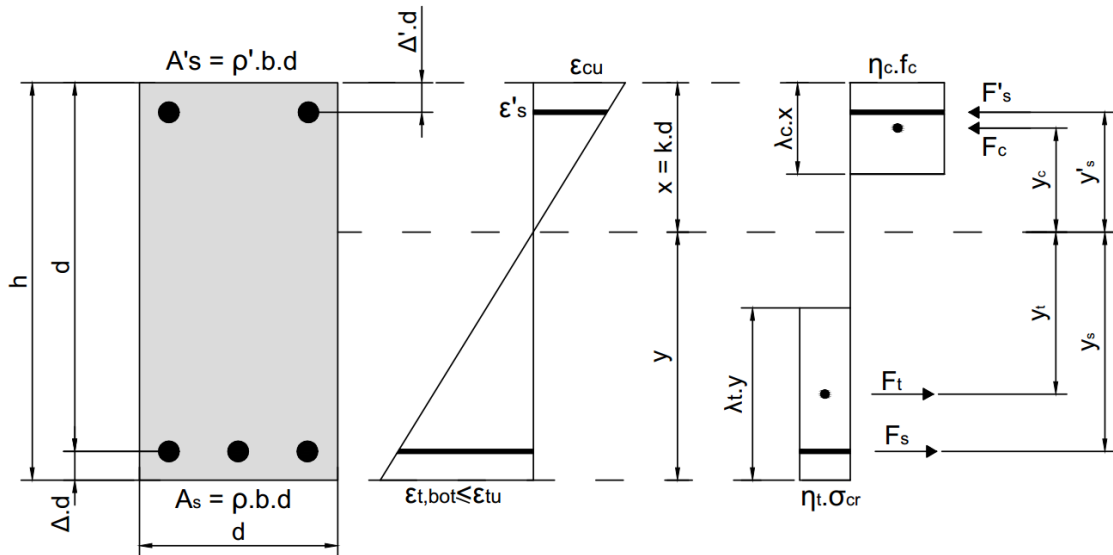


Figura 4.10 – Modelo de flexão proposto por ZIJL e MBEWE (2013).

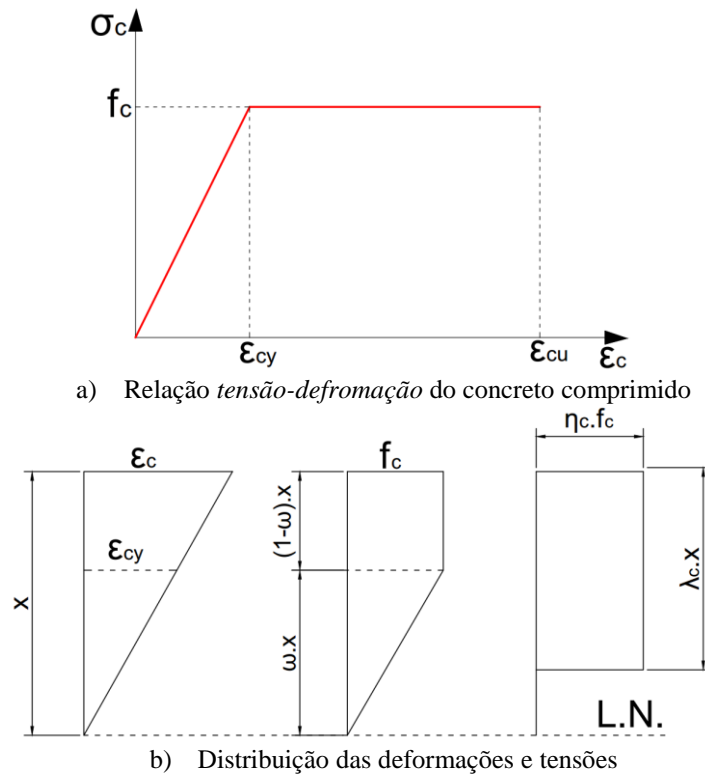
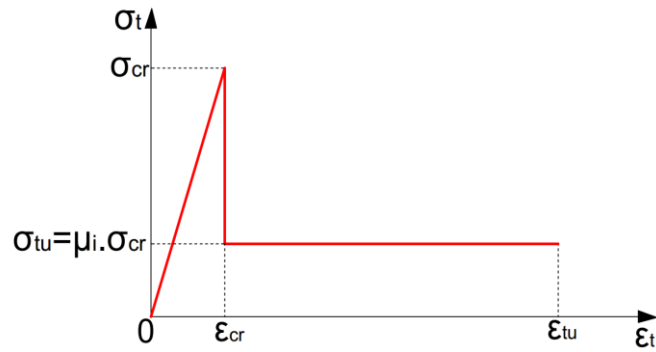
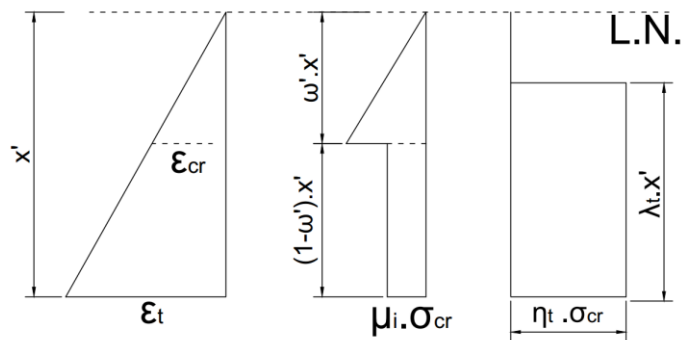


Figura 4.11 – Bloco de compressão proposto por ZIJL e MBEWE (2013).



a) Relação *tensão-deformação* do concreto tracionado



b) Distribuição das deformações e tensões

Figura 4.12 – Bloco de tração proposto por ZIJL e MBEWE (2013).

Por fim, no que diz respeito às leis constitutivas do concreto com fibras de aço, salienta-se que a deformação última do CRFA comprimido  $\epsilon_{cu}$ , ver figura 4.10, será estabelecida conforme sugere o CEB-FIP (2010) e que a deformação última do CRFA tracionado  $\epsilon_{tu}$ , ver figura 4.10, seguirá a recomendação de LIM *et al.* (1987), como mostra a equação 4.25. Informa-se que as grandezas envolvidas nessa equação foram discutidas na seção 4.3.3.

$$\epsilon_{tu} = \frac{w_u}{s_{rm}} \quad \text{Equação 4.25}$$

O cálculo do momento resistente  $M_R$  é determinado a partir de um procedimento iterativo, ver equação 4.26, onde se compatibilizam as deformações e se equilibram as resultantes de força, ver figura 4.10.

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i \quad \text{Equação 4.26}$$

Onde:

$F_i$ : resultante das forças ( $F_c$ ,  $F_t$ ,  $F_s$  e  $F'_s$ ), ver figura 4.10;

$y_i$ : distância entre as resultantes e a linha neutra da seção, ver figura 4.10.

## 5. Análise dos Modelos de Flexão

Neste capítulo foram desenvolvidas as análises que permitirão julgar a performance das considerações normativas e dos modelos teóricos para calcular o momento resistente de vigas em CRFA. Para esse fim, apresenta-se a seguir o banco de dados utilizado no estudo, os procedimentos das análises e os resultados. Por fim, é importante ressaltar que será avaliada também a influência individual do volume de fibras, do fator de forma das fibras, da resistência à compressão do concreto, da taxa de armadura de flexão e da altura útil das vigas no desempenho dos modelos de flexão propostos pelas considerações normativas e pelos modelos teóricos.

### 5.1. Banco de Dados (BD)

O desempenho dos modelos de flexão será avaliado em função de um banco de dados (BD) coletado da literatura. Neste estudo, o BD foi composto por 19 trabalhos de flexão, formando um conjunto de 142 vigas em CRFA. Com o intuito de avaliar diferentes tipos de vigas, foi estabelecido um rigoroso processo de seleção na fase de coleta dos trabalhos, alcançando-se ao fim um BD relativamente amplo. Entre as diversidades do BD, ressaltam-se as variáveis:  $V_f \leq 3,0\%$ ,  $l_f/d_f \leq 100$  (fator de forma),  $20 \text{ MPa} \leq f_c \leq 150 \text{ MPa}$ ,  $\rho \leq 3,4\%$  e  $100 \text{ mm} \leq d \leq 600 \text{ mm}$ . Além das considerações anteriores, informa-se também que as vigas analisadas foram reforçadas predominantemente por fibras do tipo *hooked end*, 126 vigas com fibras *hooked end*, 3 vigas com fibras *crimped* e 13 vigas com fibras lisas. Na tabela 5.1 se apresenta um resumo do BD (para informações mais detalhadas, consultar o anexo B).

Tabela 5.1 – Resumo do BD.

Autor	Nº de Vigas	$d$ (mm)	$\rho$ (%)	$f_c$ (MPa)	$l_f/d_f$	$V_f$ (%)	$M_{exp}$ (kN.m)
RAVINDRARAJAH e TAM (1984)	3	400 <sup>(1)</sup>	0,00	34	100	0,50-1,50	18,2-29,3
MANSUR <i>et al.</i> (1986)	11	197-200	0,75-1,36	25-35	60	0,50-1,00	19,6-41,4
OH (1992)	6	140	1,51-3,41	43-48	57	1,0-2,0	15,2-31,0
ASHOUR e Wafa (1993)	6	265	1,39	87-91	75	0,50-1,50	115,8-130,4
TAN <i>et al.</i> (1994)	4	99	1,59	41-42	60	0,50-2,00	6,5-7,5

Tabela 5.1 – Resumo do BD (Continuação).

Autor	N° de Vigas	$d$ (mm)	$\rho$ (%)	$f_c$ (MPa)	$l_f/d_f$	$V_f$ (%)	$M_{Rexp}$ (kN.m)
CHUNXIANG e PATNAIKUNI (1999)	7	127	2,64	80-96	38-40	2,30-3,00	18,0-22,0
ASHOUR <i>et al.</i> (2000)	18	215	1,18-2,37	56-111	75	0,50-1,00	60,2-120,6
KWAK <i>et al.</i> (2002)	5	212	1,52	64-69	63	1,52	44,9-52,1
ALTUN <i>et al.</i> (2005)	12	261	1,03	22-31	80	0,40-0,80	50,5-92,6
DANCYGIER e SAVIR (2006)	6	273	0,28	122-129	64-67	0,28-0,56	33,8-58,3
COLAJANNI <i>et al.</i> (2008)	4	219	1,91	75	55	1,00	78,2-78,8
MONTAIGNAC <i>et al.</i> (2011)	16	120-540 <sup>(1)</sup>	0,00-0,42	47-63	64-80	0,75-1,25	10,0-351,5
LIMA (2012)	4	205	0,28-0,49	63	80	0,25-0,76	9,6-19,3
MEDA <i>et al.</i> (2012)	4	260	0,77-1,55	43-45	50	0,38-0,76	56,4-105,0
KANG <i>et al.</i> (2012)	6	210	1,02-1,50	31-69	67	0,50-0,75	37,1-48,9
CONFORTI <i>et al.</i> (2013)	8	210	1,02-1,05	37-38	63	0,32-0,45	187,0-272,0
KHALIL e TAYFUR (2013)	6	210	140	140-149	50	0,50-1,00	24,6-30,0
BELLO (2014)	10	235	35	22-44	55	1,00	13,1-75,7
SAHOO e SHARMA (2014)	6	261	0,87-1,16	19-29	80	0,50-1,50	56,5-88,4

<sup>(1)</sup> – Peça sem armadura de flexão.

## 5.2. Procedimento de Análise

A performance dos modelos de flexão será avaliada em função do parâmetro  $\chi = M_{exp}/M_{teo}$ , que representa a razão entre os momentos resistentes obtidos experimentalmente (BD) e os momentos obtidos teoricamente, a partir das recomendações normativas e das propostas teóricas. Salienta-se que o parâmetro  $\chi$  será analisado em função da precisão, da dispersão e da segurança dos resultados. Além disto,  $\chi$  também será classificado segundo uma adaptação do DPC (*Demerit Points Classification*), cuja proposta original foi estabelecida por COLLINS (2001). Nesta análise de classificação, o parâmetro  $\chi$  é enquadrado em uma classe de segurança, ver tabela 5.2, e o seu resultado penalizado (Penal.<sub>DPC</sub>) de acordo com

essa classe. Por fim, o modelo menos penalizado, corresponde à proposta com melhor desempenho em termos da segurança.

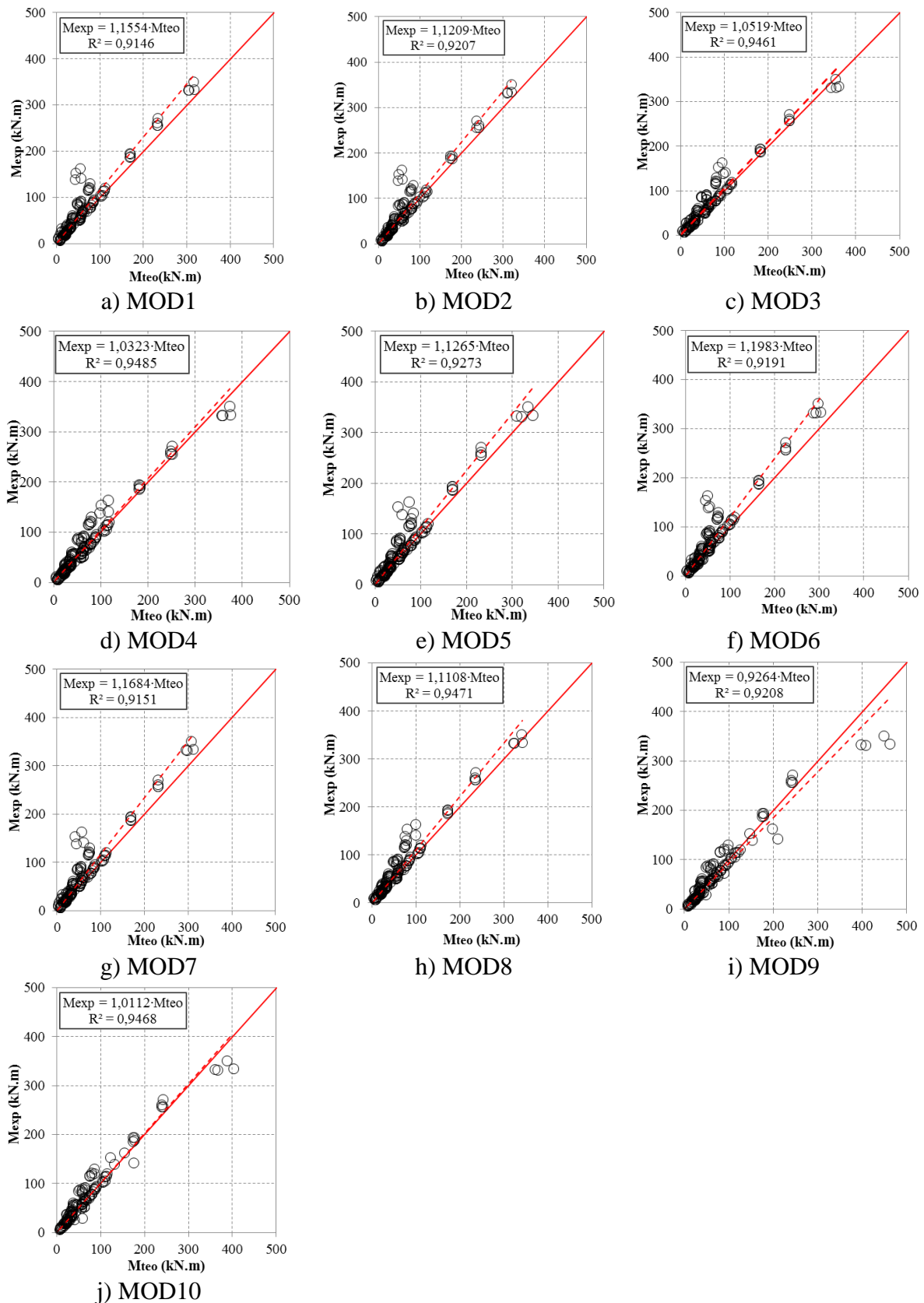
Tabela 5.2 – Classificação de  $\chi$  segundo a versão modificada do DPC.

$\chi = M_{exp}/M_{teo}$	Classificação	Penalidade
$< 0,5$	Extremamente perigoso	10
$[0,5-0,85[$	Perigoso	5
$[0,85-1,15[$	Segurança apropriada	0
$[1,15-2,00[$	Conservador	1
$\geq 2,00$	Extremamente conservador	2

Com o intuito de facilitar e padronizar a identificação dos modelos de flexão, introduz-se nas apresentações seguintes a nomenclatura  $MOD_i$  ( $i = 1$  até 10), cuja correlação com os modelos é apresentada na forma de legenda a medida que a nomenclatura  $MOD_i$  é utilizada. Adicionalmente, é importante informar que para o RILEM TC 162-TDF (2003) e para o CEB-FIP (2010), as tensões residuais das vigas do BD foram analisadas pela proposta de MORAES NETO (2013), ver equações 3.43, 3.44 e 3.45, e para o DAfStb (2010) as tensões residuais foram determinadas pela proposta de MONDO (2011), ver equação 3.46.

### 5.3. Resultados

Para discutir a precisão dos resultados, apresenta-se a figura 5.1, a qual confronta os resultados experimentais,  $M_{exp}$ , e teóricos,  $M_{teo}$ . Nessa figura, a linha sólida corresponde à situação ideal, onde  $\chi = 1,0$ , enquanto a linha tracejada representa a tendência dos resultados teóricos.



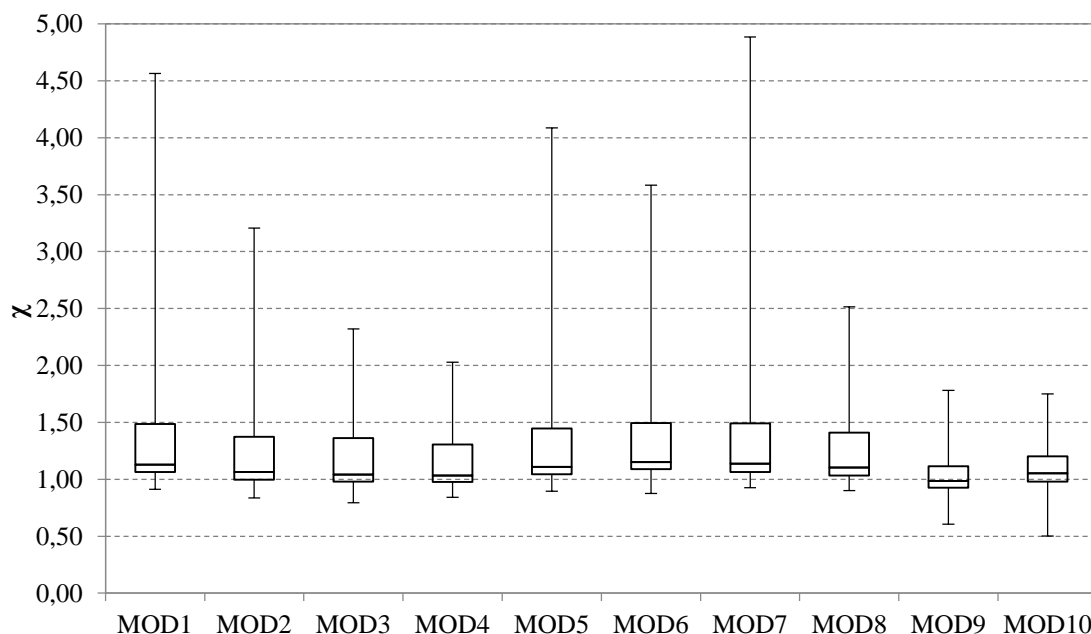
Nota:

MOD1=ACI 544 4.R (1988), MOD2=RILEM TC 162-TDF (2003), MOD3=CECS 38 (2004), MOD4=CEB-FIP (2010), MOD5=DAFStb (2010), MOD6=LOK e PEI (1998), MOD7=CHOI *et al.* (2007), MOD8=SORANAKOM e MOBASCHER (2007), MOD9=MAYA *et al.* (2012), MOD10=ZIJJL e MBEWE (2013).

Figura 5.1 – Análise da precisão dos modelos.



A dispersão é avaliada a partir do gráfico “*box and whiskers*”, ver figura 5.2, a qual exhibe os valores máximo e mínimo de  $\chi$ , o primeiro quartil (Q1), que corresponde ao limite inferior, o segundo quartil (Q2), que corresponde à mediana, e o terceiro quartil (Q3), que corresponde ao limite superior. Nessa representação do gráfico, não foram considerados os valores atípicos (*outliers*).

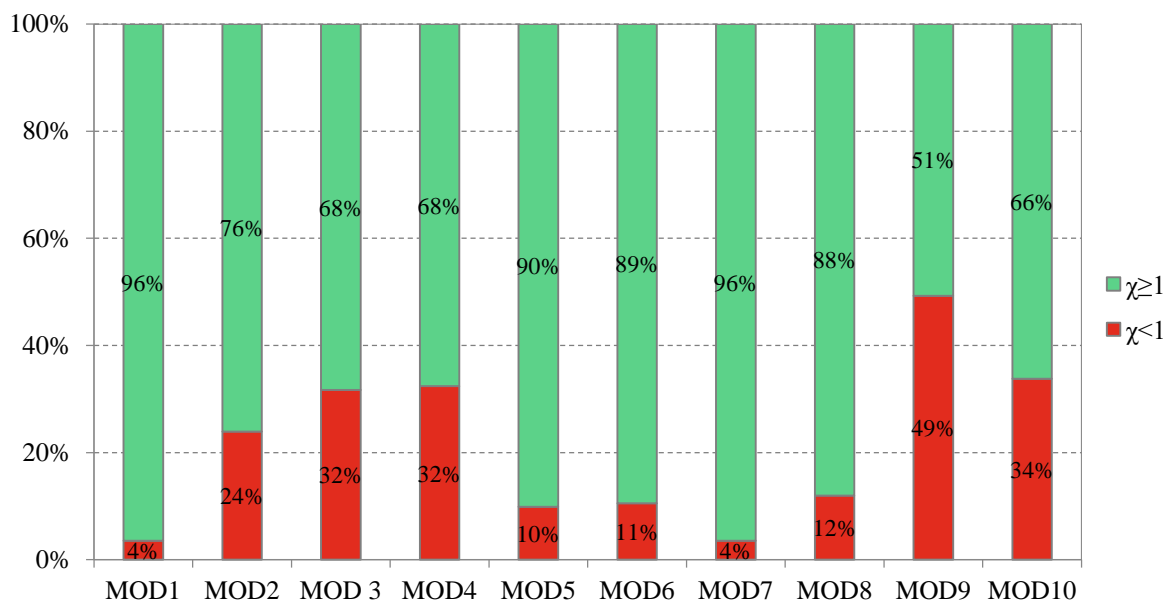


Nota:

MOD1=ACI 544 4.R (1988), MOD2=RILEM TC 162-TDF (2003), MOD3=CECS 38 (2004), MOD4=CEB-FIP (2010), MOD5=DAfStb (2010), MOD6=LOK e PEI (1998), MOD7=CHOI *et al.* (2007), MOD8=SORANAKOM e MOBASCHER (2007), MOD9=MAYA *et al.* (2012), MOD10=ZIJIL e MBEWE (2013).

Figura 5.2 – Análise quanto à precisão.

Para analisar a segurança dos cálculos, duas abordagens são apresentadas. Na primeira, é apresentado a quantidade de vigas, dentro do BD, que possuem valores de  $\chi \geq 1$  (favoráveis à segurança) e de  $\chi < 1$  (contra a segurança), ver figura 5.3. Por fim,  $\chi$  é classificado segundo a versão modificada do DPC, ver tabela 5.3. Nessa tabela também são apresentados valores estatísticos como a média (Med), o desvio padrão (DP) e o coeficiente de variação (CV).



Nota:

MOD1=ACI 544 4.R (1988), MOD2=RILEM TC 162-TDF (2003), MOD3=CECS 38 (2004), MOD4=CEB-FIP (2010), MOD5=DAfStb (2010), MOD6=LOK e PEI (1998), MOD7=CHOI *et al.* (2007), MOD8=SORANAKOM e MOBASCHER (2007), MOD9=MAYA *et al.* (2012), MOD10=ZIJL e MBEWE (2013).

Figura 5.3 – Análise quanto a quantidade de vigas que apresentam  $\chi \geq 1$  e  $\chi < 1$ .

Tabela 5.3 – Classificação de  $\chi$  segundo a versão modificada do DPC.

$\chi = M_{exp}/M_{teo}$		< 0,5	[0,5-0,85[	[0,85-1,15[	[1,15-2,00[	≥ 2,00	TOTAL	Med	DP	CV (%)
MOD1	Nº Vigas	0	0	78	54	10	142	1,37	0,60	43,80
	Penal. <sub>DPC</sub>	0	0	0	54	20	74			
MOD2	Nº Vigas	0	1	93	43	4	142	1,21	0,38	31,40
	Penal. <sub>DPC</sub>	0	5	0	43	8	56			
MOD3	Nº Vigas	0	3	92	43	4	142	1,17	0,29	24,79
	Penal. <sub>DPC</sub>	0	15	0	43	8	66			
MOD4	Nº Vigas	0	1	98	42	1	142	1,14	0,25	21,93
	Penal. <sub>DPC</sub>	0	5	0	42	2	49			
MOD5	Nº Vigas	0	0	86	46	10	142	1,32	0,52	39,39
	Penal. <sub>DPC</sub>	0	0	0	46	20	66			
MOD6	Nº Vigas	0	0	71	64	7	142	1,30	0,39	30,00
	Penal. <sub>DPC</sub>	0	0	0	64	14	66			
MOD7	Nº Vigas	0	0	74	57	11	142	1,39	0,63	45,32
	Penal. <sub>DPC</sub>	0	0	0	57	22	79			

Nota:

MOD1=ACI 544 4.R (1988), MOD2=RILEM TC 162-TDF (2003), MOD3=CECS 38 (2004), MOD4=CEB-FIP (2010), MOD5=DAfStb (2010), MOD6=LOK e PEI (1998), MOD7=CHOI *et al.* (2007).

Tabela 5.3 – Classificação de  $\chi$  segundo a versão modificada do DPC (Continuação).

$\chi = M_{exp}/M_{teo}$		< 0,5	[0,5-0,85[	[0,85-1,15[	[1,15-2,00[	$\geq 2,00$	TOTAL	Med	DP	CV (%)
MOD8	Nº Vigas	0	0	80	60	2	142	1,11	0,22	19,82
	Penal. <sub>DPC</sub>	0	0	0	60	4	64			
MOD9	Nº Vigas	0	18	92	32	0	142	1,06	0,23	21,70
	Penal. <sub>DPC</sub>	0	90	0	32	0	122			
MOD10	Nº Vigas	0	7	94	41	0	142	1,11	0,22	19,82
	Penal. <sub>DPC</sub>	0	35	0	41	0	76			

Nota:

MOD8=SORANAKOM e MOBASCHER (2007), MOD9=MAYA *et al.* (2012), MOD10=ZIIL e MBEWE (2013).

No que diz respeito à precisão, a figura 5.1 mostra que as propostas que apresentam tendência  $M_{exp} \approx M_{teo}$  são os modelos MOD3 (CECS 38, 2004), MOD4 (CEB-FIP, 2010) e MOD10 (ZIIL e MBEWE, 2013), sendo de realçar que apenas MOD9 (MAYA *et al.*, 2012) apresentou tendência com coeficiente angular menor que a unidade ( $M_{exp} = 0,9264 \cdot M_{teo}$ ), o que caracteriza disposição para cálculos contra a segurança. Na análise da dispersão, a figura 5.2 deixa claro que MOD4 (CEB-FIP, 2010), MOD8 (SORANAKOM e MOBASCHER, 2007), MOD9 (MAYA *et al.*, 2012) e MOD10 (ZIIL e MBEWE, 2013) apresentam as menores dispersões, com coeficiente de variação  $CV \approx 21\%$ , ver tabela 5.3. Entretanto, entre os modelos analisados apenas MOD9 e MOD10 apresentam indicativo de simetria dos resultados (*whisker* inferior  $\approx$  *whisker* superior), ver figura 5.2, o que significa que a porcentagem de resultados seguros é similar à porcentagem de resultados não seguros. Aprofundando a análise da segurança, a tabela 5.3 destaca os modelos MOD2 (RILEM TC 162-TDF, 2003), MOD4 (CEB-FIP, 2010) e MOD8 (SORANAKOM e MOBASCHER, 2007) com as menores penalizações e MOD9 (MAYA *et al.*, 2012) como o modelo mais penalizado.

De um modo geral, o modelo MOD4 (CEB-FIP, 2010) apresentou a melhor performance, dado os destaques positivos no que diz respeito à precisão, à dispersão e à segurança dos resultados. Entretanto, é importante comentar que as propostas do RILEM TC 162-TDF (2003), do CECS 38 (2004), do SORANAKOM e MOBASCHER (2007) e do ZIIL e MBEWE (2013) também apresentaram resultados satisfatórios. Nesse contexto, lembre-se que os modelos de flexão do RILEM e do CEB-FIP são fundamentados no conceito da tensão residual  $f_{Ri}$ , estabelecida a partir do ensaio de flexão em três pontos da viga

entalhada, enquanto que os modelos do CECS, do SORANAKOM e MOBASCHER e do ZIJL e MBEWE admitem que essa tensão residual seja estabelecida em função do volume de fibras, do fator de forma, da tensão de aderência *fibra-concreto*, entre outras grandezas, ver capítulos 3 e 4. De qualquer forma, conclui-se que independentemente da maneira de representar a tensão residual, ambas às considerações conduziram a resultados satisfatórios.

No tocante ao modelo de flexão do ACI 544 4.R (1988), do LOK e PEI (1998) e do CHOI *et al.* (2007), acredita-se que a tendência conservadora dos resultados está atrelada ao valor conservador das tensões residuais utilizadas por essas propostas. Quanto à tendência conservadora do DAfStb (2010), supõe-se que a proposta de MONDO (2011), para determinar o valor da tensão residual  $f_{ctR,u}^f$ , seja deficiente e tenha comprometido os resultados dessa recomendação normativa. Ressalta-se que diferentemente da proposta de MONDO, as considerações de MORAES NETO (2013) para calcular a tensão  $f_{Ri}$  não comprometeram os resultados do RILEM TC 162-TDF (2003) e do CEB-FIP (2010).

Por fim, é importante frisar que o coeficiente de variação dos modelos oscilou entre 20% e 45%, indicativo de que a dispersão dos resultados (precisão) precisa ser melhorada. Para este fim, acredita-se que hipóteses adicionais (consideração do fator de orientação, da dispersão das fibras na massa de concreto, do efeito de grupos de fibras arrancadas do concreto, entre outras) precisam ser incorporadas aos modelos de flexão para que se tenham cálculos mais preciso.

Com o intuito de aprofundar a análise dos modelos, apresenta-se nas seções seguintes a influência do volume de fibras, do fator de forma, da resistência à compressão do concreto, da taxa de armadura de flexão e da altura útil das vigas no valor de  $\chi$  das vigas do BD.

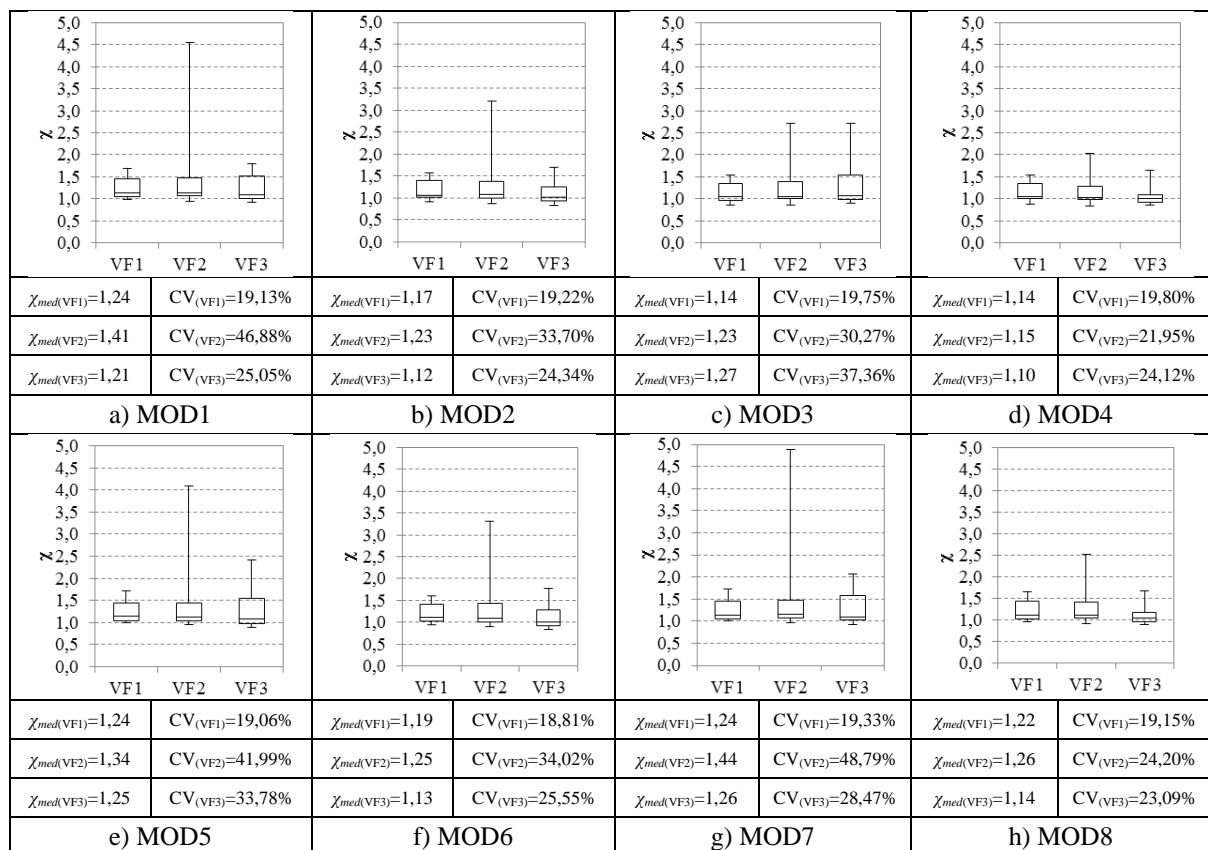
#### **5.4. Considerações Adicionais**

Nesta seção será avaliada a influência do volume de fibras, do fator de forma ( $l_f/d_f$ ), da resistência à compressão do concreto, da taxa de armadura de flexão e da altura útil das vigas no valor de  $\chi$  das vigas do banco de dados (BD). Para esse fim, serão estabelecidas três classes para cada variável avaliada, onde cada classe corresponde a uma situação de projeto. Adicionalmente, é importante informar que se considerou também o número de

vigas por classe. Essa consideração é fundamental, pois poucos dados em uma classe poderiam comprometer/mascarar os resultados da análise. Os resultados dessa análise serão exibidos a partir do gráfico “*box and whiskers*” e do valor médio de  $\chi$ ,  $\chi_{med}$ .

#### 5.4.1. Influência do volume de fibra

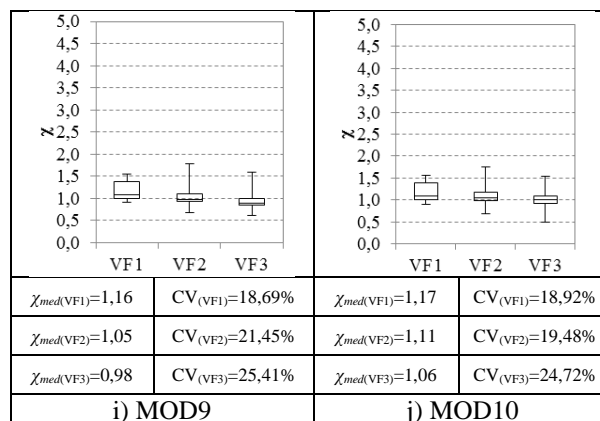
Para avaliar a influência do volume de fibras, foram criadas as classes VF1 ( $V_f < 0,45\%$ ), VF2 ( $0,45\% \leq V_f \leq 1,3\%$ ) e VF3 ( $V_f > 1,3\%$ ). Nessas condições, tem-se que a classe VF1 corresponde às vigas em CRFA cujo volume de fibras causa pouco impacto no seu desempenho estrutural. As classes VF2 e VF3 correspondem, respectivamente, às situações corriqueiras e às situações de vigas densamente reforçadas por fibras. Os resultados são apresentados na figura 5.4. Nessa figura e nas seguintes,  $\chi_{med}$  e CV são, respectivamente, os valores médios de  $\chi$  e o coeficiente de variação de cada classe.



Nota:

MOD1=ACI 544 4.R (1988), MOD2=RILEM TC 162-TDF (2003), MOD3=CECS 38 (2004), MOD4=CEB-FIP (2010), MOD5=DAFSb (2010), MOD6=LOK e PEI (1998), MOD7=CHOI *et al.* (2007), MOD8=SORANAKOM e MOBASCHER (2007).

Figura 5.4 – Influência do volume de fibra.



Nota:

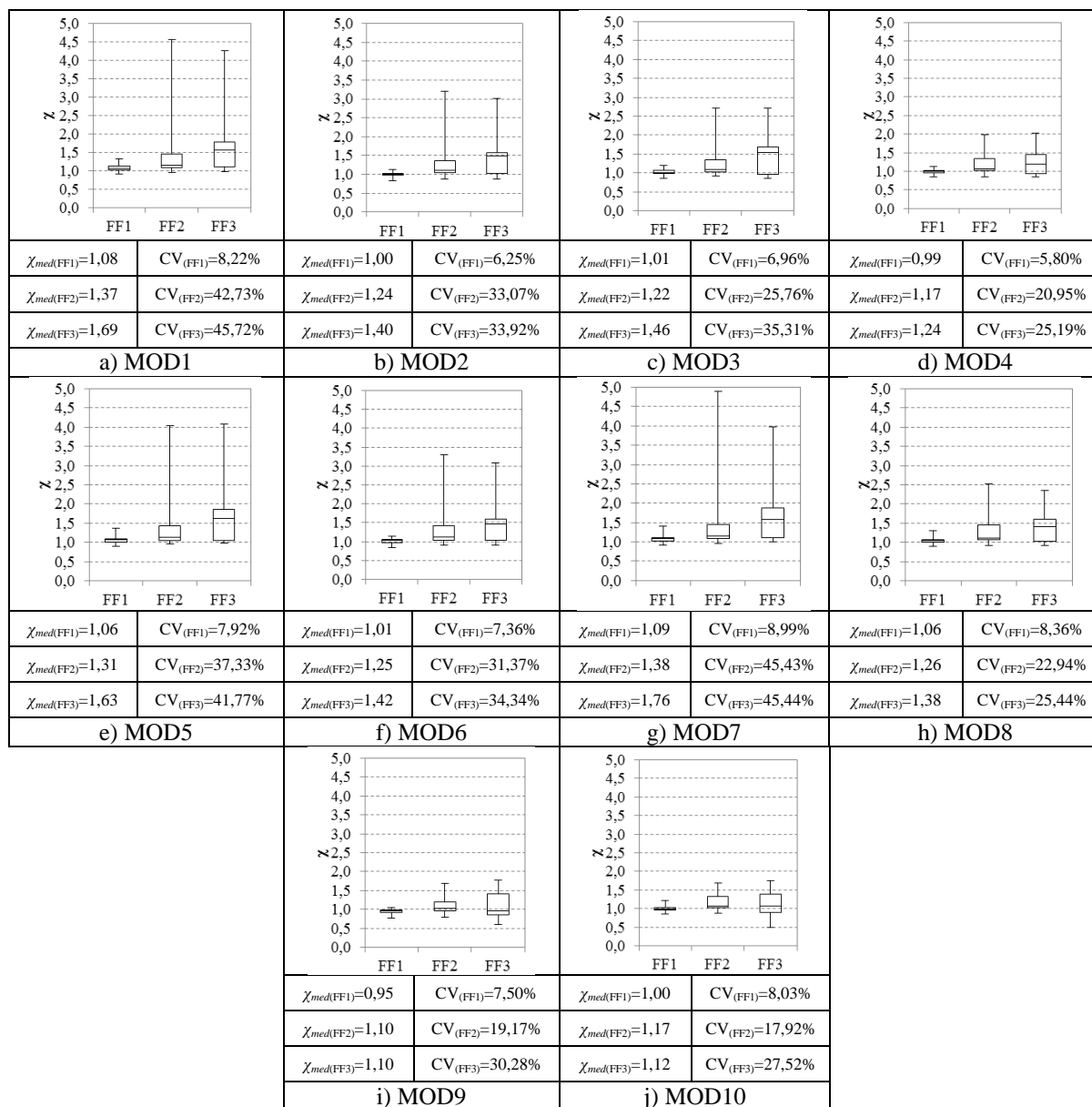
MOD9=MAYA *et al.* (2012), MOD10=ZIIL e MBEWE (2013).

Figura 5.4 – Influência do volume de fibra (Continuação).

De um modo geral, verifica-se que independentemente do modelo analisado, o volume de fibras não comprometeu negativamente os quartis Q1 e Q3, sendo aceitáveis também os valores das medianas (Q2). Quando se avalia o valor de  $\chi_{med}$ , excetuando os modelos MOD4 (CEB-FIP, 2010), MOD9 (MAYA *et al.*, 2012) e MOD10 (ZIIL e MBEWE, 2013) que apresentaram  $\chi_{med} < 1,15$ , constatam-se valores elevados na classe VF2 (situação corriqueira de aplicação de  $V_f$ ), que se justifica pelos valores máximos de  $\chi$  ( $\chi_{max}$ ) serem elevados ( $2,5 < \chi_{max} < 5,0$ ). De qualquer forma, os modelos mais indicados para calcular  $M_R$  de uma viga em CRFA, segundo a influência de  $V_f$ , são MOD4 (CEB-FIP, 2010), MOD9 (MAYA *et al.*, 2012) e MOD10 (ZIIL e MBEWE, 2013).

#### 5.4.2. Influência do fator de forma

Para avaliar a influência do fator de forma, foram criadas as classes FF1 ( $l_f/d_f < 60$ ), FF2 ( $60 \leq l_f/d_f \leq 75$ ) e FF3 ( $l_f/d_f > 75$ ). Ressalta-se que a classe FF1 corresponde às situações corriqueiras de aplicação. Os resultados da análise são apresentados na figura 5.5.



Nota:

MOD1=ACI 544 4.R (1988), MOD2=RILEM TC 162-TDF (2003), MOD3=CECS 38 (2004), MOD4=CEB-FIP (2010), MOD5=DAFstb (2010), MOD6=LOK e PEI (1998), MOD7=CHOI *et al.* (2007), MOD8=SORANAKOM e MOBASCHER (2007), MOD9=MAYA *et al.* (2012), MOD10=ZIJL e MBEWE (2013).

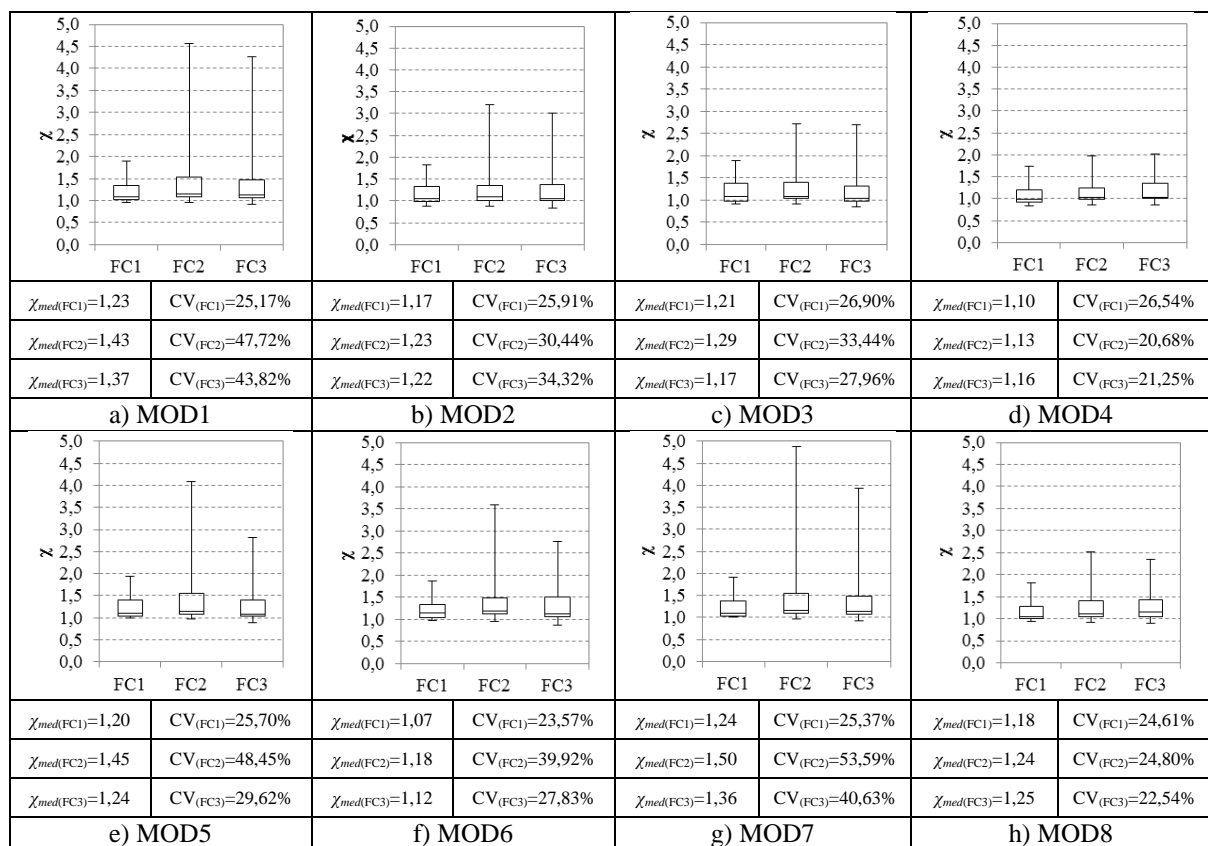
Figura 5.5 – Influência do fator de forma.

A figura deixa claro que para os casos usuais de aplicação, classe FF1, todos os modelos calculam apropriadamente o valor de  $M_R$ , tanto no que diz respeito à precisão ( $\chi_{med} \approx 1,0$ ) como à dispersão ( $CV < 10\%$ ). De um modo geral, verificou-se que tanto a média ( $\chi_{med}$ ) como a mediana (Q2) apresentam tendência de aumentar o seu valor à medida que o valor do fator de forma também aumenta. Essa tendência apresenta um impacto significativo em alguns modelos (MOD1, MOD2, MOD3, MOD5, MOD6, MOD7 e MOD8), em maior escala na classe FF3 e com menos influência na classe FF2. Os modelos menos penalizados pelo aumento do fator de forma são MOD4 (CEB-FIP, 2010), MOD9 (MAYA

et al., 2012) e MOD10 (ZIJJ e MBEWE, 2013). De qualquer maneira, o que precisa ser averiguado com mais profundidade são os motivos que conduzem à penalização dos modelos.

### 5.4.3. Influência da resistência à compressão do concreto

Para avaliar a influência da resistência à compressão do concreto, foram criadas três classes, a saber: FC1 ( $f_c < 30$  MPa), FC2 ( $30 \text{ MPa} \leq f_c \leq 50$  MPa) e FC3 ( $f_c > 50$  MPa). Nessa situação, tem-se que a classe FC2 corresponde aos casos práticos de aplicação de  $f_c$ . Os resultados são apresentados na figura 5.6.

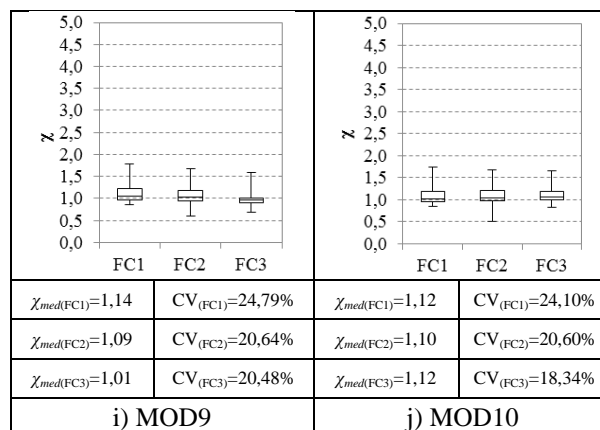


Nota:

MOD1=ACI 544 4.R (1988), MOD2=RILEM TC 162-TDF (2003), MOD3=CECS 38 (2004), MOD4=CEB-FIP (2010), MOD5=DafStb (2010), MOD6=LOK e PEI (1998), MOD7=CHOI *et al.* (2007), MOD8=SORANAKOM e MOBASCHER (2007).

Figura 5.6 – Influência da resistência à compressão do concreto.





Nota:

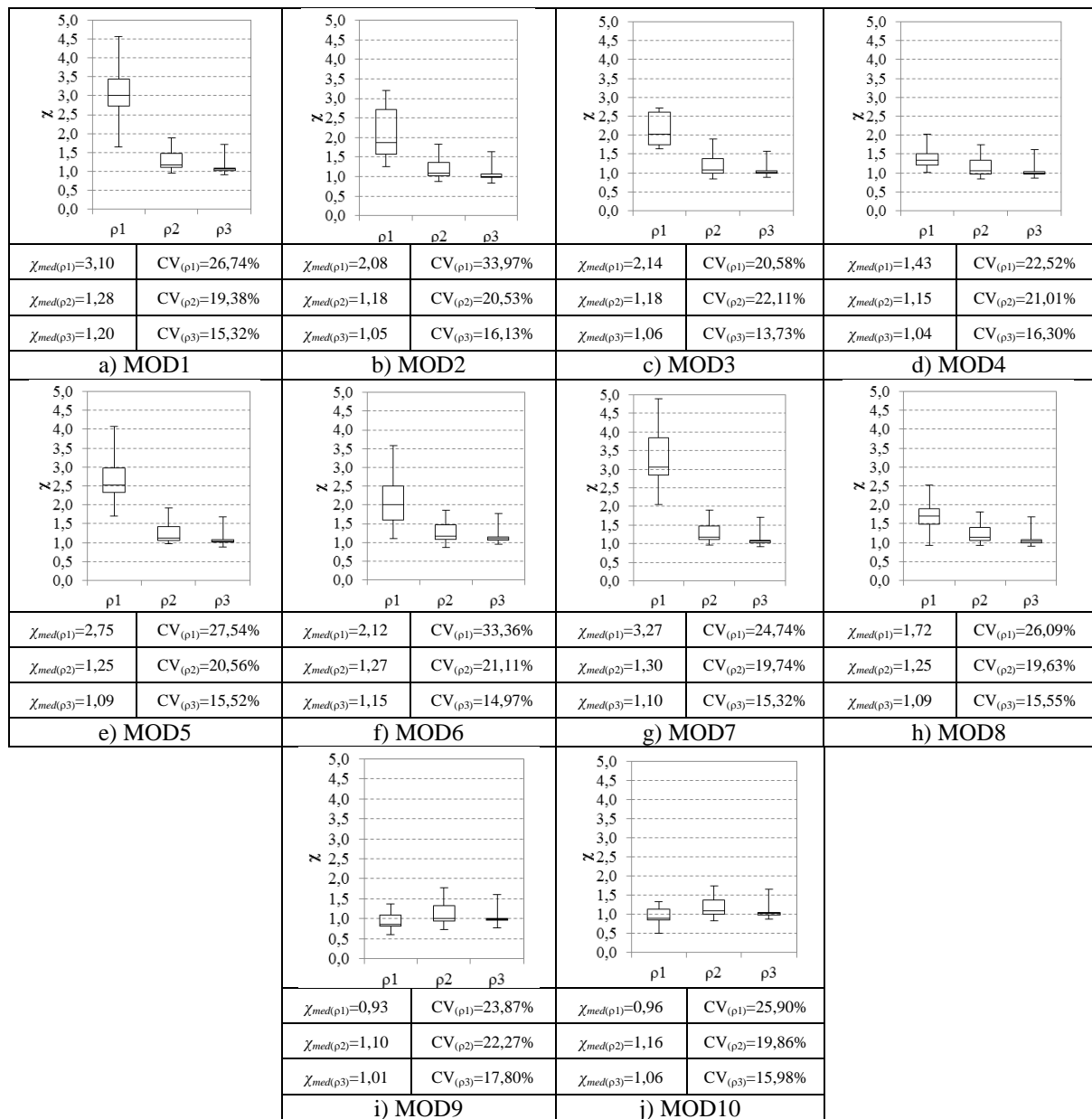
MOD9=MAYA *et al.* (2012), MOD10=ZIJL e MBEWE (2013).

Figura 5.6 – Influência da resistência à compressão do concreto (Continuação).

Nessa análise é possível verificar similaridades à análise da influência do volume de fibras, pois para todos os modelos os quartis Q1, Q2 e Q3 assumem valores aceitáveis para considerações de projeto. Além disso, o valor de  $\chi_{med}$  da maioria dos modelos, excetuando MOD4 (CEB-FIP, 2010), MOD9 (MAYA *et al.*, 2012) e MOD10 (ZIJL e MBEWE, 2013), é relativamente conservador na classe FC2 e em alguns casos, com menos intensidade, na classe FC3 também. Nestas condições, informa-se que os modelos mais indicados para calcular  $M_R$  são MOD4 (CEB-FIP, 2010), MOD9 (MAYA *et al.*, 2012) e MOD10 (ZIJL e MBEWE, 2013).

#### 5.4.4. Influência da taxa de armadura de flexão

Nesta análise, as vigas do banco de dados foram divididas nas classes  $\rho 1$  ( $\rho=0\%$ ),  $\rho 2$  ( $0\% < \rho \leq 1,5\%$ ) e  $\rho 3$  ( $\rho > 1,5\%$ ). Salienta-se que a classe  $\rho 2$  corresponde às situações práticas de aplicação. Os resultados referentes à influência da taxa de armadura são apresentados na figura 5.7.



Nota:

MOD5=DAFStb (2010), MOD6=LOK e PEI (1998), MOD7=CHOI *et al.* (2007), MOD8=SORANAKOM e MOBASCHER (2007), MOD9=MAYA *et al.* (2012), MOD10=ZIIL e MBEWE (2013).

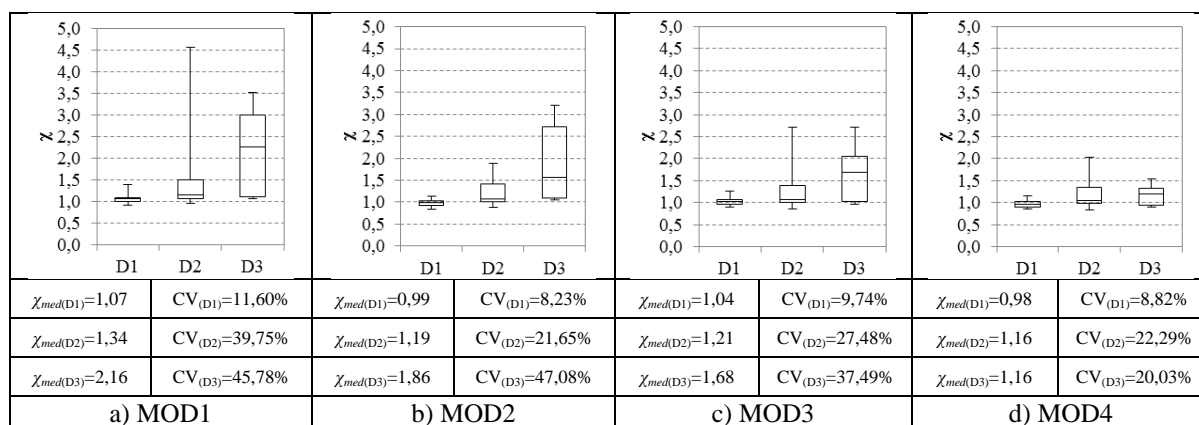
Figura 5.7 – Influência da taxa de armadura de flexão.

A figura 5.7 mostra que com exceção de MOD9 (MAYA *et al.*, 2012) e MOD10 (ZIIL e MBEWE, 2013), os demais modelos são severamente penalizados na classe  $\rho1$  (resultados muito conservadores), o que revela a incapacidade desses modelos em calcular de maneira precisa o valor de  $M_R$  de vigas em CRFA sem armadura de flexão. Entretanto, é necessário ressaltar que na classe  $\rho1$  ( $\rho=0\%$ ) os modelos MOD9 e MOD10, apesar de confirmarem  $\chi_{med} \approx 1,0$ , apresentam os quartis Q1, Q2 e quase 100% de Q3 na condição  $\chi < 1,0$ , ratificando a tendência em calcular resultados contra a segurança. No tocante à análise da classe  $\rho2$ , classe correspondente às situações práticas, apenas os modelos MOD4 (CEB-FIP, 2010), MOD9 e MOD10, apresentaram  $\chi_{med} < 1,15$ , sendo os modelos restantes

significativamente conservadores. Por fim, na classe  $\rho_3$  ( $\rho > 1,5\%$ ), excetuando MOD1 (ACI 544 4.R, 1988) que foi conservador, todos os modelos calcularam  $M_R$  com precisão apropriada ( $\chi_{med} < 1,15$  e  $CV < 20\%$ ). Acredita-se que a condição encontrada na classe  $\rho_3$  se deve ao fato das vigas densamente armadas impedirem/inibirem o desenvolvimento de grandes deformações na região tracionada do concreto, controle da fissuração, o que minimiza a colaboração das fibras como mecanismo de reforço. De um modo geral, levando em consideração a precisão, a dispersão e a segurança dos resultados, aponta-se MOD4 (CEB-FIP, 2010), MOD9 (MAYA *et al.*, 2012) e MOD10 (ZIJL e MBEWE, 2013) como as propostas mais apropriadas para calcular  $M_R$  de vigas em CRFA.

#### 5.4.5. Influência da altura útil

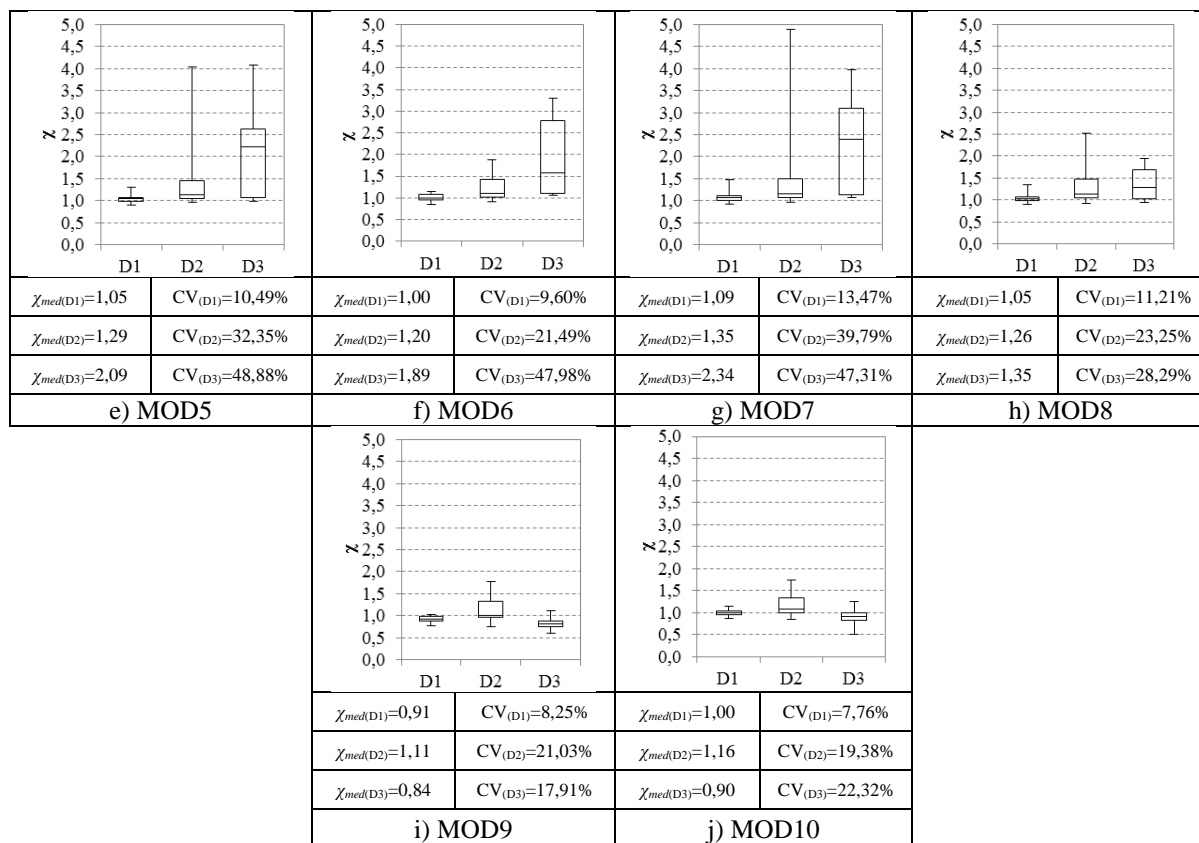
Para esta análise foram criadas as classes D1 ( $d < 150$  mm), D2 ( $150 \text{ mm} \leq d \leq 300$  mm) e D3 ( $d > 300$  mm). Nessas condições, tem-se D2 como a classe representativa das situações práticas em laboratório e D3 como a classe correspondente às situações práticas nas construções (edificações residenciais e comerciais). Os resultados são apresentados na figura 5.8.



Nota:

MOD1=ACI 544 4.R (1988), MOD2=RILEM TC 162-TDF (2003), MOD3=CECS 38 (2004), MOD4=CEB-FIP (2010),

Figura 5.8 – Influência da altura útil.



Nota:

MOD1=ACI 544 4.R (1988), MOD2=RILEM TC 162-TDF (2003), MOD3=CECS 38 (2004), MOD4=CEB-FIP (2010), MOD5=DAfStb (2010), MOD6=LOK e PEI (1998), MOD7=CHOI *et al.* (2007), MOD8=SORANAKOM e MOBASCHER (2007), MOD9=MAYA *et al.* (2012), MOD10=ZIJL e MBEWE (2013).

Figura 5.8 – Influência da altura útil (Continuação).

A figura 5.8 confirma que todos os modelos apresentaram resultados apropriados na classe D1 ( $d < 150$  mm), sendo de realçar, de um modo geral,  $\chi_{med} \approx 1,0$  e  $CV < 15\%$ . Na classe D2 ( $150 \text{ mm} \leq d \leq 300$  mm), situação prática em laboratório, destacam-se os modelos MOD2, MOD4, MOD6, MOD9 e MOD10, com  $\chi_{med} < 1,20$  e  $CV < 25\%$ , sendo os demais conservadores ( $\chi_{med} > 1,20$ ). Por fim, na classe D3 ( $d > 300$  mm), situação prática nas construções, excetuando MOD4 e MOD10 que apresentaram resultados satisfatórios, observou-se que MOD9 apresentou resultados contra a segurança e que os demais modelos foram muito conservadores, o que revela a necessidade de se aplicar um fator de escala (*size effect*) a esses modelos. No que diz respeito à aplicação de um fator de escala, vale lembrar que entre os modelos avaliados, somente MOD2 (RILEM TC 162-TDF, 2003) e MOD5 (DAfStb, 2010) utilizam fatores de escala, os quais não foram apropriados para o cálculo das vigas da classe D3. Levando em consideração a influência da altura útil das vigas, consideram-se os modelos MOD4 (CEB-FIP, 2010) e MOD10 (ZIJL e MBEWE, 2013) os mais apropriados para calcular  $M_R$ .

Por fim, levando em consideração a precisão, a dispersão e os resultados seguros na análise de todos os parâmetros avaliados, conclui-se que os modelos MOD4 (CEB-FIP, 2010) e MOD10 (ZIIL e MBEWE, 2013) são os mais apropriados para calcular o momento resistente  $M_R$  de vigas em CRFA. O modelo MOD9 (MAYA *et al.*, 2012), apesar de apresentar resultados relativamente precisos, foi significativamente penalizado na análise da influência da altura útil, principalmente na classe D3 ( $d > 300$  mm), que representa as situações práticas nas construções residenciais e comerciais. No que diz respeito aos demais modelos, de um modo geral, observou-se tendência conservadora, ou muito conservadora, nas análises apresentadas, sendo de realçar os resultados do modelo MOD1 (ACI 544 4.R, 1988).

## 6. Análise da Relação *Momento-Curvatura*

### 6.1. Considerações iniciais

Neste capítulo será apresentada a simulação (não linear do material) das seções transversais das vigas ensaiadas por BARROS e FIGUEIRAS (1999), com o intuito de discutir a relação *momento-curvatura* ( $M-\Phi$ ) das vigas em CRFA. Além de avaliar a influência das fibras, também será discutido o impacto das armaduras convencionais no CRFA (armaduras tracionadas e comprimidas) e o efeito de se utilizar diferentes classes de resistência no concreto com fibras (resistência à tração e à compressão). Para esse fim, será utilizado o *software DOCROS (Design Of CROSS Sections)*, o qual atende os requisitos necessários para a realização da presente análise.

### 6.2. Programa experimental de BARROS e FIGUEIRAS (1999)

Os autores ensaiaram sete vigas chatas (500 x 75 x 1500) mm<sup>3</sup>, sendo uma viga de referência ( $V_f = 0$ ) e seis vigas em CRFA. Entre as vigas em CRFA, foram formados conjuntos de duas vigas com  $V_f$  variando em 0,38% (30 kg/m<sup>3</sup>), 0,57% (45 kg/m<sup>3</sup>) e 0,76% (60 kg/m<sup>3</sup>). As fibras de aço utilizadas por BARROS e FIGUEIRAS (1999) foram do tipo DRAMIX ZX60/.80 (*hooked end*), com  $l_f = 60$  mm e  $d_f = 0,8$  mm. As principais características das vigas são informadas na tabela 6.1. As relações *momento-curvatura* das vigas são apresentadas na figura 6.1.

Tabela 6.1 – Vigas ensaiadas por BARROS e FIGUEIRAS (1999).

Vigas	$b-h$ (mm)	$d$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$f_{ct,min}-f_{ct,cm}-f_{ct,max}$ (MPa)	$f_{R1}$ (MPa)	$f_{R3}$ (MPa)	$\rho$ (%)	$V_f$ (%)	$l_f/d_f$
V0	500-75	71 <sup>(1)</sup>	56,0 (3,2) <sup>(2)</sup>	2,77-3,96-5,15 <sup>(3)</sup>	0	0	0,11	0	-
V30-1	500-75	71 <sup>(1)</sup>	52,5 (2,1) <sup>(2)</sup>	2,64-3,77-4,90 <sup>(3)</sup>	≈4,0	≈4,0	0,11	0,38	75
V30-2									
V45-1	500-75	71 <sup>(1)</sup>	51,6 (1,2) <sup>(2)</sup>	2,60-3,72-4,83 <sup>(3)</sup>	≈7,0	≈7,0	0,11	0,57	75
V45-2									
V60-1	500-75	71 <sup>(1)</sup>	51,8 (4,2) <sup>(2)</sup>	2,61-3,73-4,85 <sup>(3)</sup>	≈12,0	≈12,0	0,11	0,76	75
V60-2									

<sup>(1)</sup> – Valor teórico (não confirmado experimentalmente);

<sup>(2)</sup> – O valor entre parênteses corresponde ao desvio padrão de  $f_c$ ;

<sup>(3)</sup> – Valores calculados segundo o CEB-FIP, 2010 (não confirmado experimentalmente).

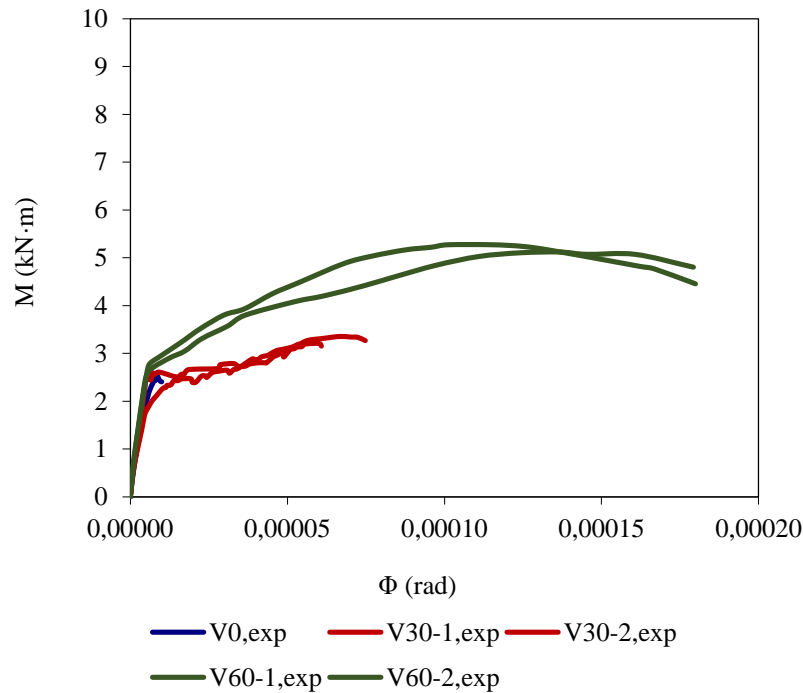


Figura 6.1 – Relação *momento-curvatura* das vigas de BARROS e FIGUEIRAS (1999).

A análise da figura deixa claro que o reforço proporcionado pelas fibras de aço aprimora a resistência e a ductilidade das vigas. A alteração no padrão de comportamento é significativa apenas na fase pós-fissura, como se verifica com clareza nas vigas com  $V_f$  de 0,57% e 0,76% (V45 e V60).

### 6.3. DOCROS – Design Of CROss Sections

O DOCROS é um *software* acadêmico de análise de seções transversais, o qual foi desenvolvido na Universidade do Minho (Guimarães/Portugal) e que permite estabelecer a relação *momento-curvatura* de uma viga sujeita à flexão simples. Segundo VARMA (2012), o programa admite as hipóteses básicas da teoria de flexão, como a consideração da seção permanecer plana após a deformação e a aderência perfeita entre os materiais distintos que formam a seção. No DOCROS, a seção transversal é discretizada em camadas horizontais, onde as dimensões da largura e da espessura são definidas de forma a representar a seção transversal da viga em análise, ver figura 6.2. Salienta-se que a cada camada é atribuída uma lei constitutiva e que os resultados finais (momentos, curvaturas, tensões, deformações, linha neutra, abertura da fissura, entre outros) são obtidos a partir de um processo iterativo, que consideram as equações de equilíbrio, de compatibilidade e a própria lei constitutiva de cada camada.

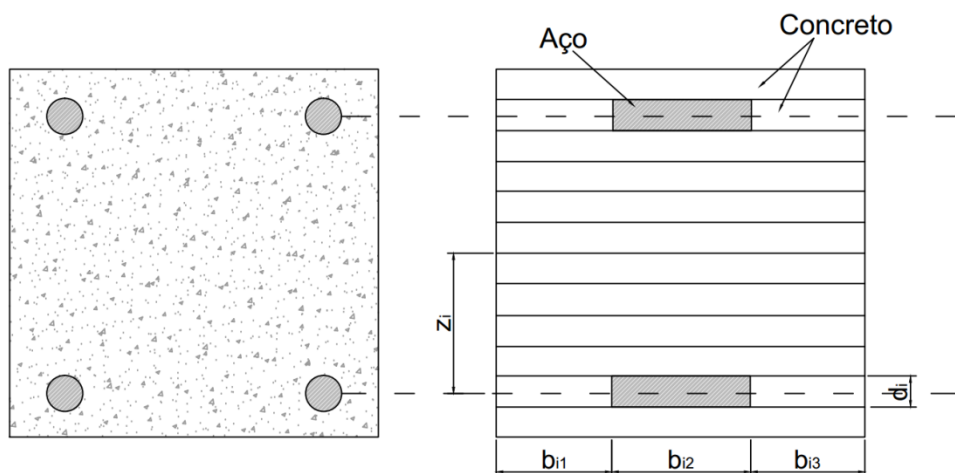


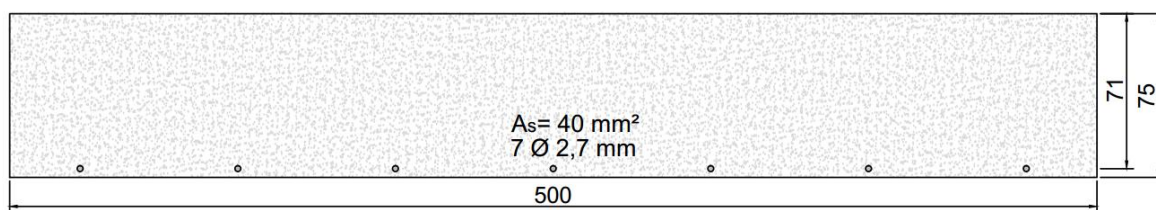
Figura 6.2 – Discretização de uma seção transversal no DOCROS (VARMA, 2012).

Entre as particularidades do DOCROS, ressalta-se a capacidade de analisar seções transversais com geometria irregular composta por diferentes materiais (seção  $I$ ,  $T$ ,  $L$ , etc.), permitir a aplicação de esforços axiais (protensão) e proporcionar a análise de seções com fases distintas de construção (situação de reforço). Além das considerações anteriores, é importante comentar que o referido programa tem um amplo banco de dados de leis constitutivas, permitindo a simulação de materiais cimentícios, poliméricos, metálicos, entre outros, os quais podem ser solicitados estaticamente ou ciclicamente.

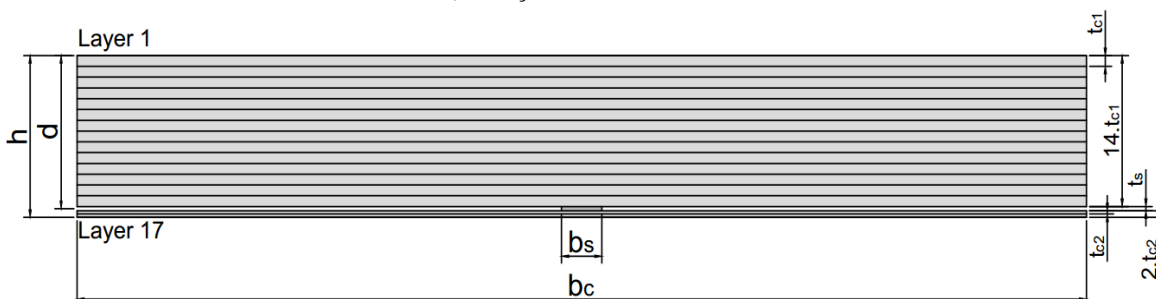
#### 6.4. Simulação das vigas

Entre as vigas ensaiadas por BARROS e FIGUEIRAS (1999), selecionou-se para a simulação as vigas com  $V_f$  variando em 0, 0,38 e 0,76% (V0, V30 e V60), avaliando assim a influência das fibras de aço no comportamento  $M-\Phi$  das vigas. As seções transversais das vigas são idênticas, ver figura 6.3 (a), visto que a variável em estudo é o volume de fibras  $V_f$ . A seção transversal discretizada para o DOCROS é mostrada na figura 6.3 (b). Nessa figura, verifica-se que as seções das vigas foram divididas em 17 camadas, sendo as cotas apresentadas na figura selecionadas de maneira a representar as seções ensaiadas por BARROS e FIGUEIRAS, ver tabela 6.2.





a) Seção transversal do ensaio



b) Seção transversal discretizada

Figura 6.3 – Discretização da seção transversal das vigas de BARROS e FIGUEIRAS (1999).

Tabela 6.2 – Camadas das seções das vigas de BARROS e FIGUEIRAS (1999).

Vigas	$b_c$ (mm)	$b_s$ (mm)	$t_{c1}$ (mm)	$t_{c2}$ (mm)	$t_s$ (mm)
V0	500,0	20,0	5,0	1,5	2,0
V30	500,0	20,0	5,0	1,5	2,0
V60	500,0	20,0	5,0	1,5	2,0

A lei constitutiva que definiu o concreto comprimido e tracionado (sem fibras,  $f_{Ftu} = 0$ , e com fibras,  $f_{Ftu} \neq 0$ ) nesta simulação é mostrada na figura 6.4. Salienta-se que as referidas leis correspondem às leis constitutivas recomendadas pelo CEB-FIP (2010), visto que o modelo de flexão proposto pelo referido documento foi bem avaliado nas análises anteriores. Os valores que definem as respectivas leis são apresentados na tabela 6.3. Adicionalmente, apresenta-se na figura 6.5 a representação gráfica da lei constitutiva do concreto tracionado.

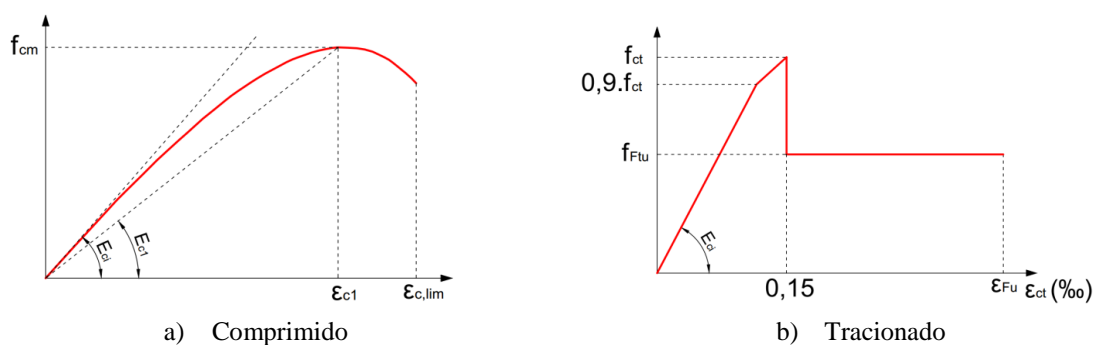


Figura 6.4 – Lei constitutiva do concreto (CEB-FIP, 2010).

Tabela 6.3 – Lei constitutiva adotada para o CRFA.

Vigas	$f_c$ (MPa)	$E_{ci}$ (GPa)	$\varepsilon_{cI}$ (‰)	$\varepsilon_{c,lim}$ (‰)	$f_{ct}$ (MPa)	$0,9f_{ct}$ (MPa)	$f_{Ftu}$ (MPa)	$\varepsilon_{0,9f_{ct}}$ (‰)	$\varepsilon_{fu}$ (‰)
V0	50	36,76	2,5	3,5	3,0	2,7	≈ 0,0	0,073	70 <sup>(1)</sup>
V30	50	36,76	2,5	3,5	3,0	2,7	1,2	0,073	70 <sup>(1)</sup>
V60	50	36,76	2,5	3,5	3,0	2,7	3,0	0,073	70 <sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> –  $\varepsilon_{fu} = w_{it}/l_{cs} \approx 70\%$ , ver equação 3.26.

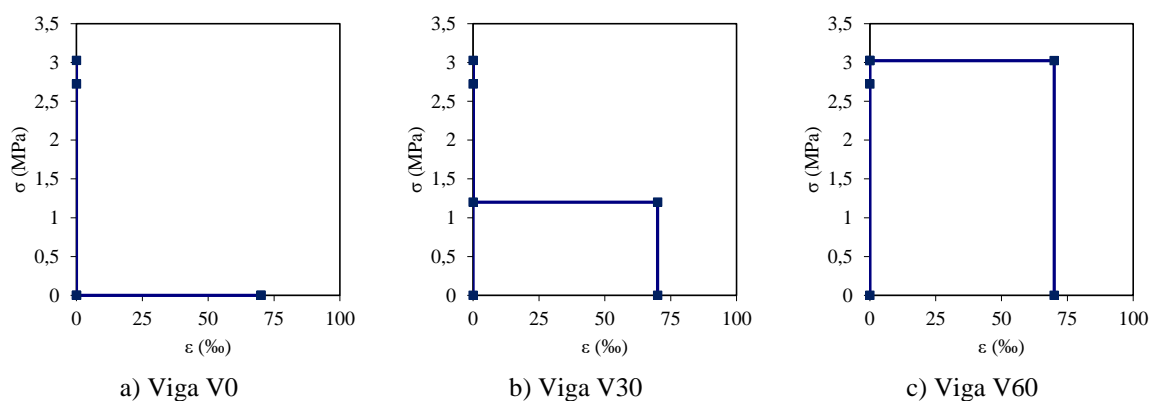


Figura 6.5 – Lei constitutiva adotada para o concreto tracionado.

Conforme mostrou a tabela 6.3, adotou-se na simulação  $f_c = 50$  MPa para a resistência à compressão do concreto, o que se julga aceitável dados os desvios padrão apresentados na tabela 6.1. O módulo de elasticidade foi calculado pela equação 6.1 e as deformações  $\varepsilon_{cI}$  e  $\varepsilon_{c,lim}$  foram extraídas da tabela 6.4, como sugere o CEB-FIP (2010).

$$E_{ci} = 21,5 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{f_c}{10}\right)^{\frac{2}{3}} \quad [MPa] \quad \text{Equação 6.1}$$

Tabela 6.4 – Deformações do concreto comprimido segundo o CEB-FIP (2010).

	C20	C30	C40	C50	C60	C70	C80	C90	C100	C110	C120
$\varepsilon_{cI}$ (‰)	2,1	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,0	3,0
$\varepsilon_{c,lim}$ (‰)	3,5	3,5	3,5	3,5	3,4	3,2	3,1	3,0	3,0	3,0	3,0

No que diz respeito à resistência à tração do concreto, é importante ressaltar que se adotou  $f_{ct} = 3,0$  MPa, ver tabela 6.3, que corresponde, aproximadamente, a uma resistência 0,5 MPa inferior ao valor de  $f_{ctm}$ , ver equação 6.2 para  $f_c = 50$  MPa. Essa consideração foi imprescindível para tornar a simulação uma representação fiel dos ensaios de BARROS e FIGUEIRAS (1999) e julga-se uma consideração aceitável, visto que a equação 6.2 conduz

a resultados conservadores (recomendação normativa) e que o autor não avaliou o valor de  $f_{ct}$  de forma mais precisa (ensaios). Adicionalmente, informa-se que  $f_{ct} = 3,0$  MPa atende aos limites máximo,  $f_{ct,max} = 1,3 \cdot f_{ctm} = 4,71$  MPa, e mínimo,  $f_{ct,min} = 0,7 \cdot f_{ctm} = 2,54$  MPa, sugeridos pelo CEB-FIP (2010) para  $f_c = 50$  MPa.

$$f_{ctm} = \begin{cases} 0,3 \cdot (f_c - 8)^{2/3} & \text{se } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 2,12 \cdot \ln(1 + 0,1 \cdot f_c) & \text{se } f_c > 58 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Equação 6.2}$$

Para calcular a tensão residual  $f_{Ftu}$ , ver tabela 6.3, foi utilizada a equação 6.3, como sugere o CEB-FIP (2010). Na análise da viga V0, adotou-se  $f_{Ftu} \approx 0,0$  MPa a partir de  $\varepsilon_{ct} \approx 0,15\%$ , ver figura 6.4 (b), configurando assim o padrão de comportamento de um concreto tracionado sem fibras. Na análise da viga V30, aplicou-se a equação 6.3 para calcular  $f_{Ftu}$ , com  $f_{R1} \approx f_{R3} \approx 4,0$  MPa, conforme apresentado em BARROS e FIGUEIRAS (1999). Entretanto, nos casos em que as tensões residuais  $f_{R1}$  e  $f_{R3}$  são desconhecidas, as equações 6.4 e 6.5 podem ser aplicadas, como sugere MORAES NETO (2013). Por fim, para calcular a resistência residual  $f_{Ftu}$  da viga V60, BARROS e FIGUEIRAS (1999) apresentam tensões residuais  $f_{R1} \approx f_{R3} \approx 12,0$  MPa, as quais aplicadas à equação 6.3 conduz à  $f_{Ftu} \approx f_{ct} = 3,0$  MPa (valor adotado na simulação).

$$f_{Ftu} = f_{Fts} - \frac{w_u}{CMOD_3} \cdot (f_{Fts} - 0,5 \cdot f_{R3} + 0,2 \cdot f_{R1}) \geq 0 \quad \text{Equação 6.3}$$

$$f_{R1} = 7,5 \cdot \left( V_f \cdot \frac{l_f}{d_f} \right)^{0,8} \quad (MPa) \quad \text{Equação 6.4}$$

$$f_{R3} = 6,0 \cdot \left( V_f \cdot \frac{l_f}{d_f} \right)^{0,7} \quad (MPa) \quad \text{Equação 6.5}$$

Sendo  $f_{Fts} = 0,45 \cdot f_{R1}$  e  $w_u = CMOD_3 = 2,5$  mm, conforme especifica o CEB-FIP (2010).

A lei constitutiva do aço das armaduras é mostrada na figura 6.6. Para esta simulação, adotou-se  $f_y = 560$  MPa (tensão de escoamento),  $E_s = 210$  GPa (módulo de elasticidade),  $\varepsilon_{sy} = f_{sy}/E_s$  (deformação correspondente à  $f_{sy}$ ),  $f_{su} = 800$  MPa (tensão última) e  $\varepsilon_{su} = 10\%$  (deformação correspondente à  $f_{su}$ , valor adotado), conforme informou BARROS e FIGUEIRAS (1999).

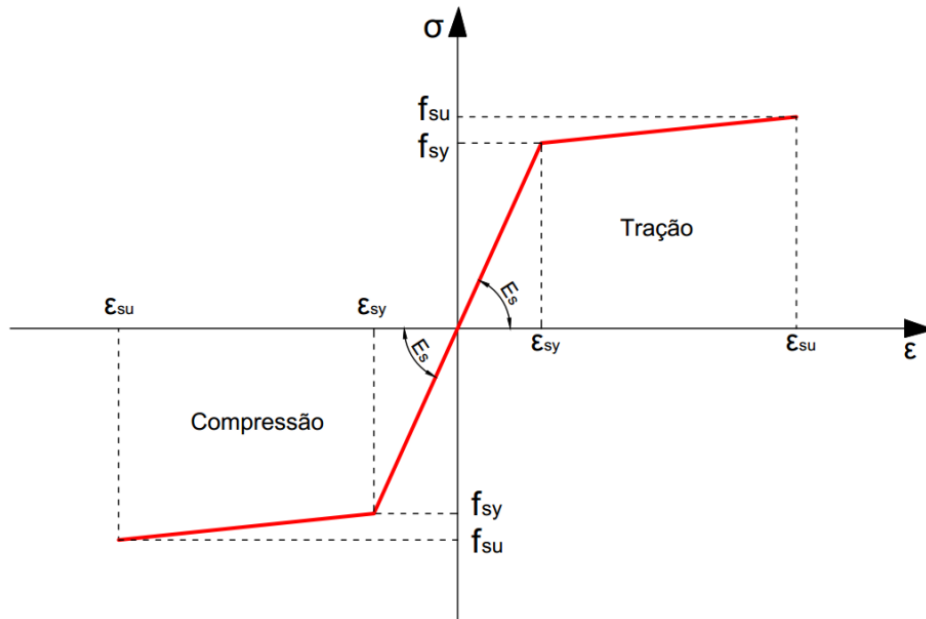


Figura 6.6 – Lei constitutiva do aço das armaduras.

As relações *momento-curvatura* das vigas,  $M-\Phi$ , são apresentadas na figura 6.7, onde se constata que a simulação registrou com precisão satisfatória o ensaio de BARROS e FIGUEIRAS (1999). Nessa figura é possível discutir a performance do CRFA no comportamento das vigas, verificando-se melhoria tanto na resistência quanto na ductilidade. Na figura 6.7 (d), a grandeza  $\Delta M_R = M_{R,CRFA}/M_{R,Ref}$  define o acréscimo de resistência à flexão proporcionado pelas fibras, sendo  $M_{R,CRFA}$  e  $M_{R,Ref}$  os momentos resistentes das vigas em CRFA e de referência.

No tocante à resistência, observou-se que para uma aplicação de CRFA com  $V_f = 0,76\%$  ( $60 \text{ kg/m}^3$ ), acréscimos de  $\approx 100\%$  foram alcançados, comparativamente à viga V0 (ver análise de  $\Delta M_R$  na figura 6.7). No CRFA, o volume de fibras, o fator de forma e o tipo de fibra utilizada no concreto, ambos têm impacto direto sobre os valores das tensões residuais ( $f_{Flu}$ ). Sendo assim, avaliando a resistência das vigas ( $M_R$ ) em função da resistência residual  $f_{Flu}$ , conclui-se que para uma tensão residual  $f_{Flu} \approx 3,0 \text{ MPa}$  (V60) é factível alcançar acréscimos de resistência ( $\Delta M_R$ ) de aproximadamente 100%. De qualquer maneira, ressalta-se que o impacto das fibras foi notório após o escoamento das armaduras, onde é possível verificar uma alteração significativa na relação  $M-\Phi$ .

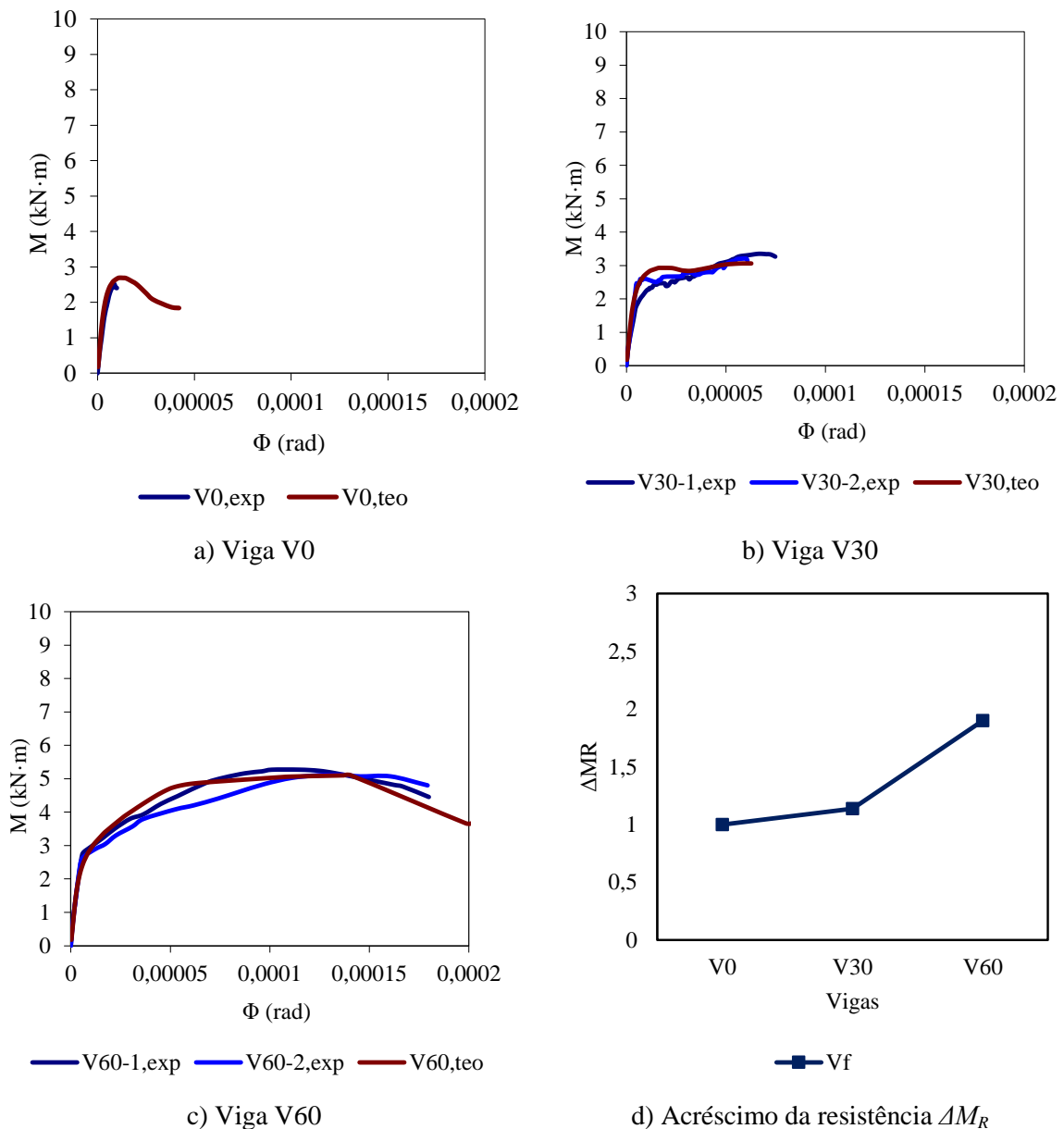


Figura 6.7 – Simulação da realação  $M-\Phi$  das vigas de BARROS e FIGUIRAS (1999).

A figura 6.7 deixa claro que dominar o valor da tensão residual  $f_{Ftu}$  é fundamental na análise de vigas em CRFA, mais importante, inclusive, que o conhecimento dos valores de  $V_f$ ,  $l_f/d_f$  (fator de forma) e do tipo de fibra utilizado no concreto, pois é  $f_{Ftu}$  que definirá a performance estrutural de uma viga em CRFA. Desta maneira, conhecer as grandezas e os fatores que influenciam no valor de  $f_{Ftu}$  é o grande desafio dos pesquisadores, pois até o presente momento esse assunto ainda não foi abordado de maneira prática para ser aplicado em considerações de projeto.

Com o intuito de discutir o assunto com mais profundidade, apresenta-se nas seções seguintes a necessidade de se avaliar a influência de outros parâmetros, além da tensão

residual  $f_{Fu}$ , no comportamento *momento-curvatura* das vigas de BARROS e FIGUEIRAS (1999). Para esse propósito, apresenta-se na sequência a simulação da influência da ação conjunta dos mecanismos de reforços proporcionado pelas fibras e pelas armaduras convencionais do concreto armado (armaduras tracionadas e comprimidas). Além disso, discute-se também o impacto das resistências à tração e à compressão do concreto.

## **6.5. Considerações adicionais**

### **6.5.1. Influência das armaduras**

Nesta análise, as vigas de BARROS e FIGUEIRAS (1999) foram simuladas de forma a permitir a discussão da influência das armaduras convencionais (tracionadas e comprimidas) sobre a performance das vigas em CRFA. As leis constitutivas que definem os concretos e o aço das armaduras são as mesmas apresentadas na seção anterior, ver figuras 6.4 e 6.6. Adotou-se para essa análise a armadura de tração variando em  $\rho$ ,  $2\cdot\rho$  e  $4\cdot\rho$ , ver figura 6.8, sendo de realçar que a primeira opção,  $\rho = 0,11\%$ , corresponde às vigas ensaiadas.

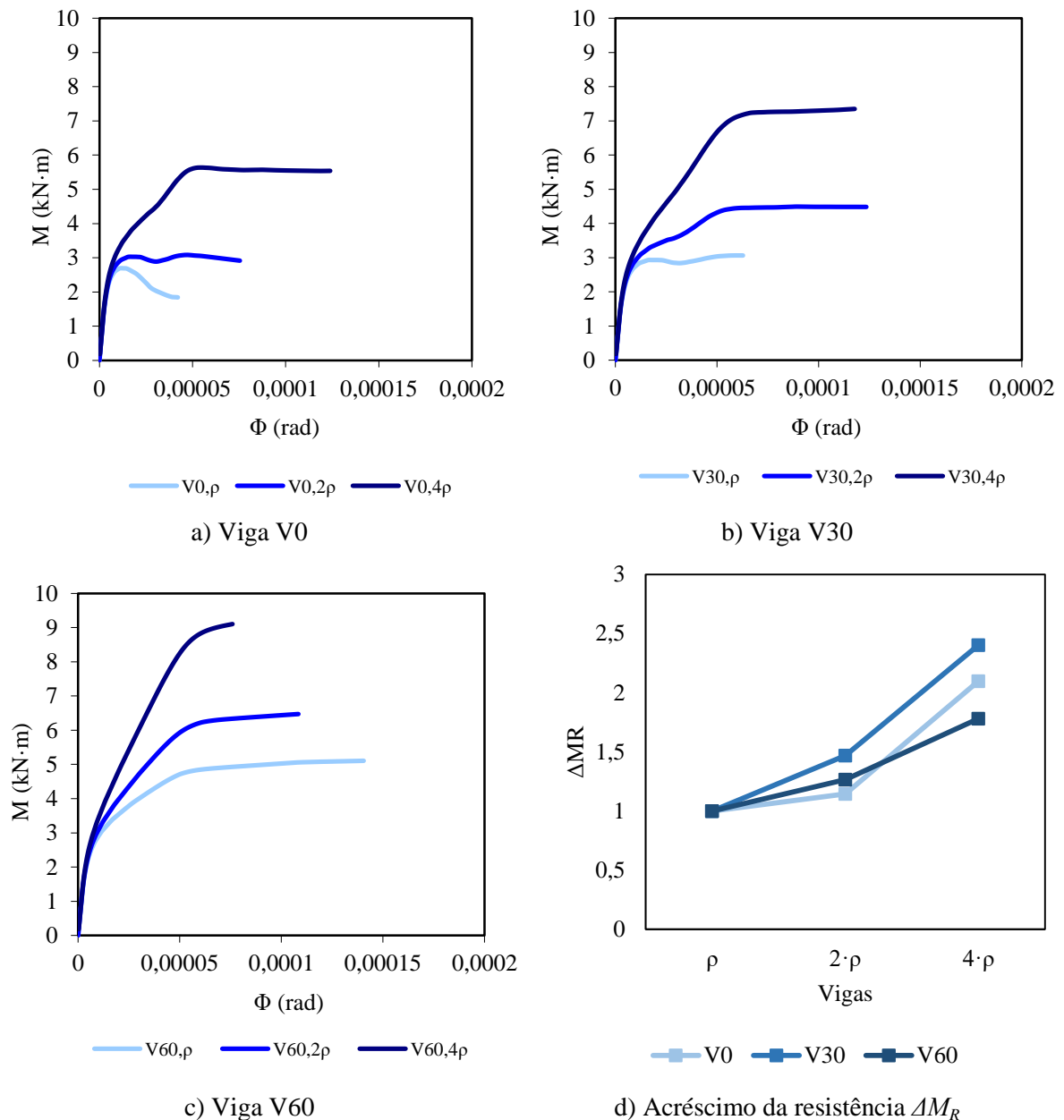


Figura 6.8 – Simulação da influência da taxa de armadura tracionada.

Conforme esperado, aumentar o valor da taxa de armadura de  $\rho$  para  $4\rho$  aprimorou a resistência das vigas, independentemente do valor de  $V_f$ , sendo importante destacar que na viga V0 além da resistência, beneficiou-se também a ductilidade. No tocante à performance das vigas, confirmou-se que o mecanismo de reforço proporcionado pelas fibras é ligeiramente inibido quando a viga é reforçada com uma taxa  $4\rho$ . Sendo assim, no que diz respeito ao acréscimo de resistência, pode-se afirmar, de um modo geral, que nas vigas densamente armadas, a utilização de fibras não é recomendada, pois a armadura convencional assume um papel preponderante no controle da fissuração, o que limita o desempenho das fibras. De qualquer forma, é importante notar que para as vigas de

BARROS e FIGUEIRAS (1999) foram alcançados acréscimos de resistência de  $\approx 140\%$  para a viga V30 com taxa  $4\cdot\rho$  e acréscimos de  $\approx 80\%$  para a viga V60 com taxa  $4\cdot\rho$ . Além das considerações anteriores, é importante discutir que o comportamento das vigas V0 com taxa  $4\cdot\rho$  e V60 com taxa  $\rho$  são similares, o que sustenta a possibilidade da fibra de aço substituir o reforço convencional do concreto armado.

No que diz respeito à análise da influência da armadura de compressão, ressalta-se que as propriedades das vigas de BARROS e FIGUEIRAS (1999) foram mantidas, simulando-se apenas três condições:  $\rho' = \rho = 0,11\%$ ,  $2\cdot\rho'$  e  $4\cdot\rho'$ . Nessas condições, as leis constitutivas dos concretos e do aço das armaduras permaneceram as mesmas e a alteração na discretização da seção transversal das vigas é mostrada na figura 6.9. Nessa figura, as cotas apresentadas foram tratadas na seção anterior, sendo de realçar as cotas  $t_{c3} = 5,9091$  mm e  $b_s' = b_s$  para as vigas com taxa  $\rho'$ ,  $= 2\cdot b_s$  para as vigas com taxa  $2\cdot\rho'$  e  $= 4\cdot b_s$  para as vigas com taxa  $4\cdot\rho'$ . As análises são apresentadas na figura 6.10.

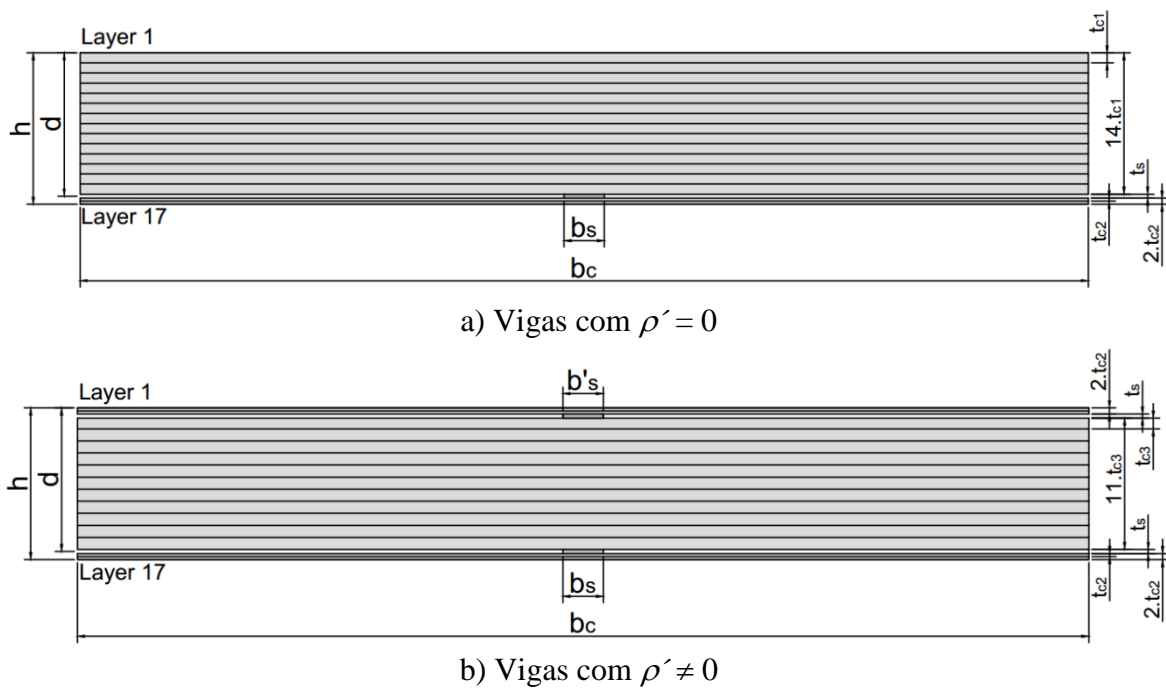


Figura 6.9 – Discretização da seção transversal



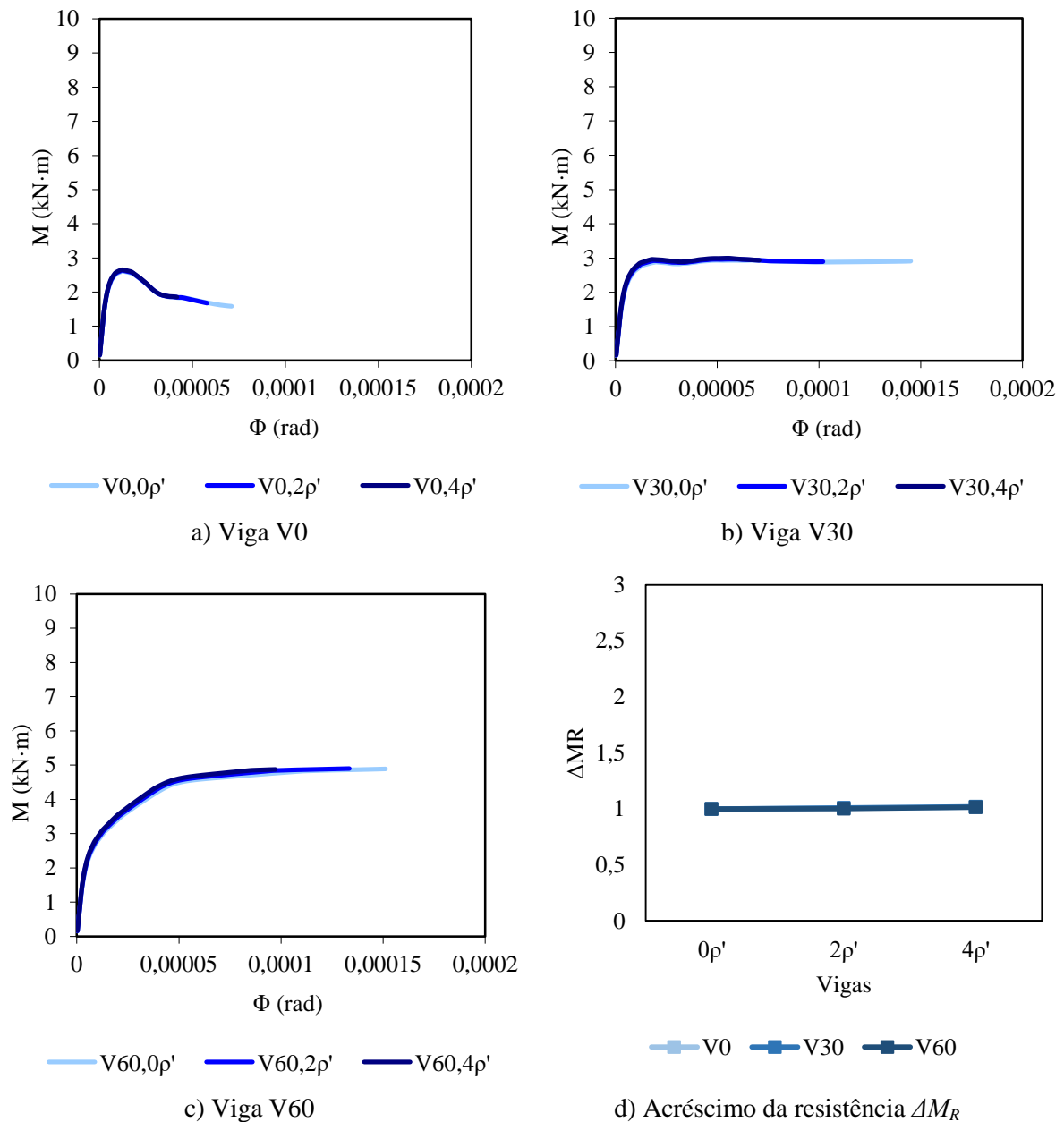


Figura 6.10 – Simulação da influência da taxa de armadura comprimida.

A figura 6.10 mostra que a armadura comprimida não alterou a relação  $M-\Phi$  das vigas. Entretanto, é importante salientar que a simulação trata de vigas chata ( $500 \times 75 \times 1500 \text{ mm}^3$ ) e com taxas de armadura relativamente baixas, sendo as vigas mais armadas na região comprimida com taxa  $4 \cdot \rho' = 0,44\%$ . Nessas condições, não é possível tratar com relevância a influência da armadura comprimida e condições mais favoráveis devem ser consideradas para discutir o assunto.

### 6.5.2. Influência das resistências

O capítulo 2, referente à abordagem teórica do CRFA, enfatizou as incertezas sobre a contribuição das fibras de aço nas resistências à tração  $f_{ct}$  e à compressão  $f_c$  do concreto. Dessa forma, discute-se nessas análises a influência dessas resistências na relação  $M-\Phi$  das vigas de BARROS e FIGUEIRAS (1999). Na primeira análise se avalia o impacto da resistência à tração e para isto, foram mantidas as propriedades iniciais das vigas, ver tabelas 6.2 e 6.3, simulando-se apenas a variação de  $f_{ct}$  em 2,5 MPa, 3,5 MPa e 4,5 MPa. A seleção desse intervalo visou atender às recomendações normativas no que diz respeito aos limites superior ( $f_{ct,max}$ ) e inferior ( $f_{ct,min}$ ) da resistência à tração. Desta forma, para  $f_c = 50$  MPa, têm-se  $f_{ct,min} \approx 2,5$  MPa,  $f_{ctm} \approx 3,5$  MPa e  $f_{ct,max} \approx 4,5$  MPa. Os resultados da simulação são apresentados na figura 6.11.

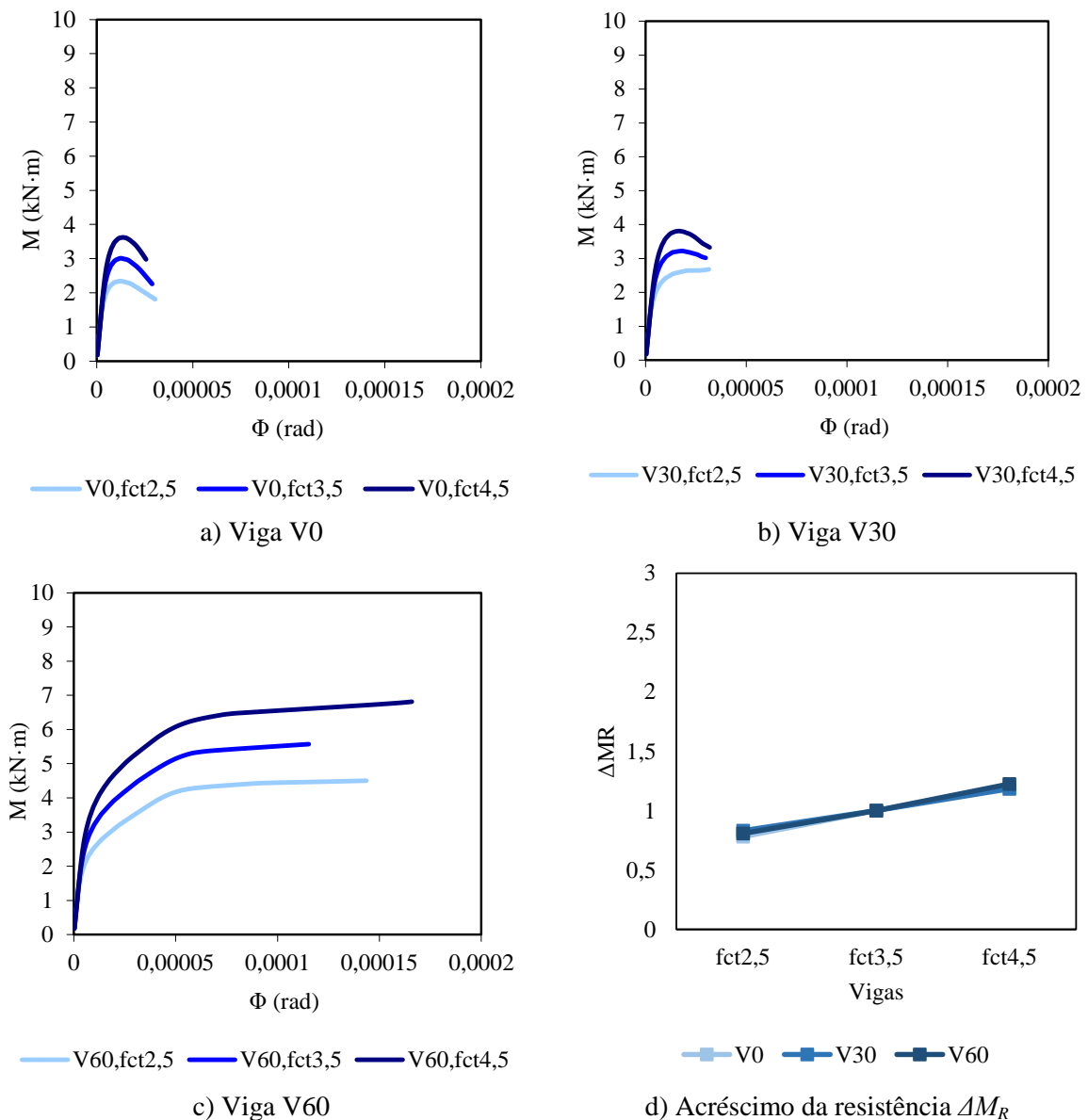


Figura 6.11 – Simulação da influência da resistência à tração do concreto.

Independente da viga analisada, V0, V30 ou V60, a figura 6.11 permite afirmar, tomando como referência  $f_{ct} = 3,5 \text{ MPa} \approx f_{ctm}$ , que para  $f_{ct} = 2,5 \text{ MPa}$  houve uma queda de resistência ( $\Delta M_R$ ) de  $\approx 20\%$  e que para  $f_{ct} = 4,5 \text{ MPa}$  houve um acréscimo de  $\approx 20\%$ . Essa informação pode ser interpretada como o erro cometido nas análises (a favor da segurança) quando não se considera o possível acréscimo da resistência à tração ( $f_{ct}$ ) devido ao reforço das fibras. Nesse contexto, vale recordar que o ACI 544.1R-96 relata acréscimos de até 40% no valor de  $f_{ct}$  quando se utiliza CRFA com  $V_f \approx 1,5\%$ . No que diz respeito às considerações de análise, é importante salientar que na ausência de resultados experimentais o valor de  $f_{ctm}$  é utilizado para representar a resistência à tração do concreto. Entretanto, sempre que  $f_{ctm}$  não representar apropriadamente a resistência à tração do concreto, resultados contra a segurança podem ser estabelecidos. Vale lembrar que nas análises das vigas de BARROS e FIGUEIRAS (1999) se adotou  $f_{ct} = 3,0 \text{ MPa}$ , que corresponde à 20% do valor obtido com a expressão de  $f_{ctm}$  (ver equação 6.2) para  $f_c = 50 \text{ MPa}$ .

Na segunda parte da simulação é avaliada a influência da resistência à compressão  $f_c$  na relação  $M-\Phi$  das vigas de BARROS e FIGUEIRAS (1999). Para esse propósito, informa-se que as leis constitutivas dos concretos e do aço das armaduras são as apresentadas nas tabelas 6.2, 6.3 e na figura 6.6, excetuando o valor de  $f_c$  que variou em 30 MPa, 50 MPa e 70 MPa e as suas respectivas resistências à tração ( $f_{ct} = f_{ctm}$ ) que variaram em 2,3 MPa, 3,6 MPa e 4,4 MPa. Os resultados da simulação são apresentados na figura 6.12.

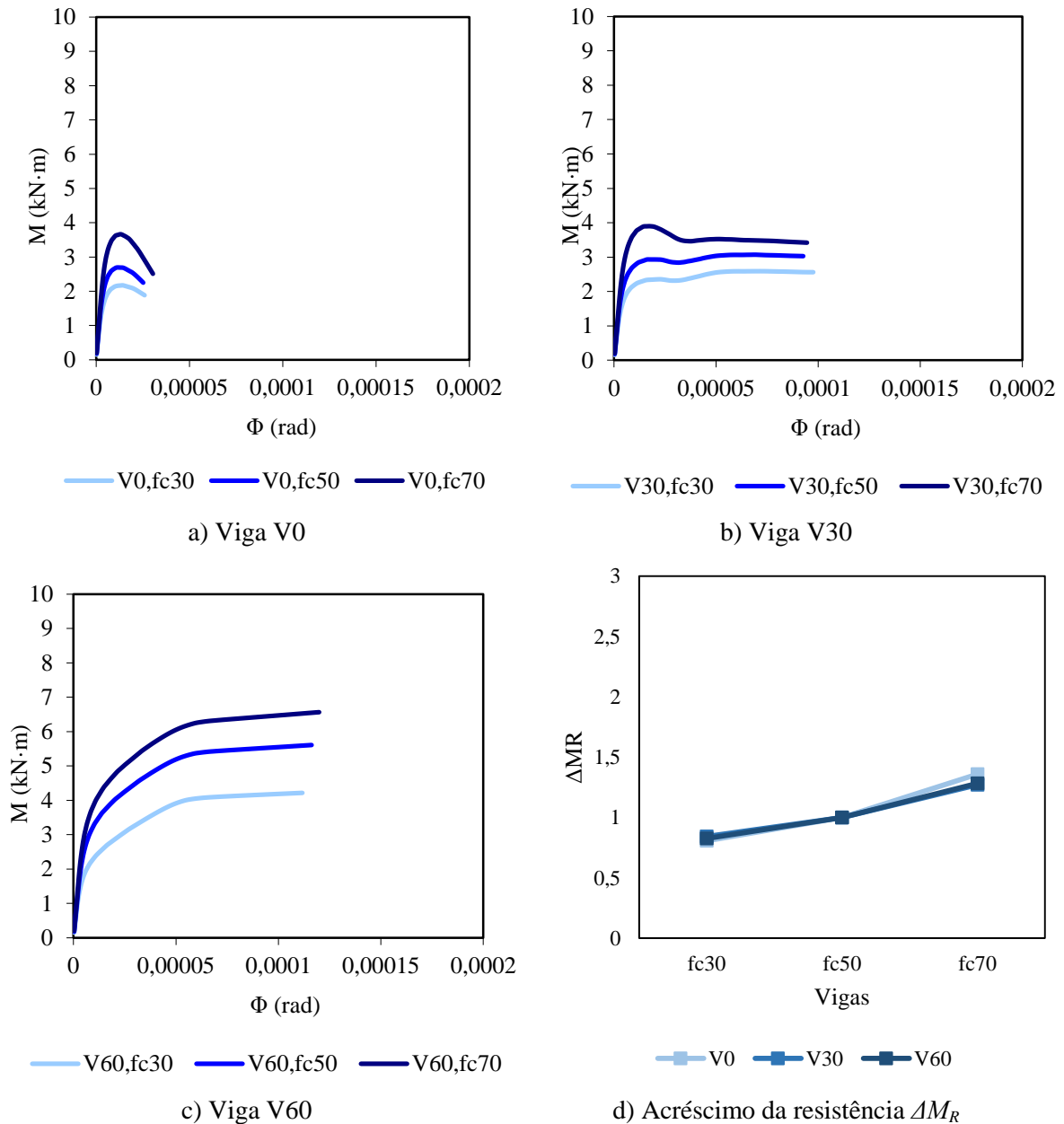


Figura 6.12 – Simulação da influência da resistência à compressão do concreto.

A análise da figura 6.12 confirma o esperado, o aumento de  $f_c$  conduz a acréscimo de resistência ( $\Delta M_R$ ), sendo de realçar acréscimos de  $\approx 60\%$  quando se comparam as vigas com  $f_c = 30$  MPa e as vigas com  $f_c = 70$  MPa. Analisando as vigas V0, verifica-se que a relação  $M-\Phi$  da viga com  $f_c = 70$  MPa apresenta comportamento mais frágil que a viga com  $f_c = 30$  MPa, confirmando assim o caráter frágil evidenciado nas vigas com elevada resistência. Nas vigas V30 se verifica comportamento análogo, porém, a resposta frágil da viga com  $f_c = 70$  MPa é menos acentuada. Diferentemente das vigas V0 e V30, nas vigas V60, independentemente da classe de resistência do concreto, as tensões residuais introduzidas à lei constitutiva do CRFA tracionado são suficientes para garantir o

comportamento dúctil das vigas. Desta maneira, fica confirmada a qualidade das fibras em atribuir ductilidade aos concretos de elevada resistência.

## 7. Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

### 7.1. Conclusões

O presente trabalho avaliou o cálculo do momento resistente  $M_R$  de vigas em concreto reforçado com fibras de aço (CRFA). Para esse propósito, foi apresentada e discutida a metodologia de cálculo de cinco recomendações normativas, ACI 544.4R-88 (1988), RILEM TC 162-TDF (2003), CECS 38 (2004), CEB-FIP (2010) e DAfStb (2010), e a metodologia de cinco propostas de cálculo, LOK e PEI (1998), CHOI *et al.* (2007), SORANAKOM e MOBASCHER (2007), MAYA *et al.* (2012) e ZIJL e MBEWE (2013). Além de analisar esses modelos, abordou-se também a simulação (não linear do material) das seções transversais das vigas ensaiadas por BARROS e FIGUEIRAS (1999), com o intuito de discutir a relação *momento-curvatura* ( $M-\Phi$ ) das vigas em CRFA. Nessa análise foi utilizado como ferramenta computacional o *software* DOCROS (*Design Of CROSS Sections*).

Para avaliar a performance dos modelos de flexão (recomendações normativas e propostas teóricas) um banco de dados (BD) foi coletado da literatura (19 trabalhos foram utilizados, contabilizando 142 vigas em CRFA). A análise foi fundamentada no parâmetro  $\chi = M_{exp}/M_{teo}$ , que representa a razão entre os momentos resistentes obtidos experimentalmente (BD) e os momentos obtidos teoricamente. O parâmetro  $\chi$  foi analisado em função da precisão, da dispersão e da segurança dos resultados. Além disso,  $\chi$  também foi classificado segundo uma adaptação do DPC (*Demerit Points Classification*), cuja proposta original foi estabelecida por COLLINS (2001).

De um modo geral, a análise dos modelos de flexão mostrou que a proposta do CEB-FIP (2010) apresentou a melhor performance, dado os destaques positivos no que diz respeito à precisão, à dispersão e à segurança (Med = 1,14, CV = 21,93% e Penal.<sub>DPC</sub> = 49). Entretanto, é importante comentar que as propostas do RILEM TC 162-TDF (2003), do CECS 38 (2004), do SORANAKOM e MOBASCHER (2007) e do ZIJL e MBEWE (2013) também apresentaram resultados satisfatórios. No tocante ao modelo de flexão do ACI 544 4.R (1988), do LOK e PEI (1998) e do CHOI *et al.* (2007), acredita-se que a tendência conservadora dos seus resultados esteja atrelada ao valor conservador das tensões residuais utilizadas por essas propostas. Quanto à tendência conservadora do DAfStb (2010), supõe-se que a proposta de MONDO (2011) para determinar o valor da

tensão residual  $f_{ctR,u}^f$  seja deficiente e tenha comprometido os resultados dessa recomendação. Ressalta-se que diferentemente da proposta de MONDO, as considerações de MORAES NETO (2013) para calcular a tensão  $f_{Ri}$  não comprometeram os resultados do RILEM TC 162-TDF (2003) e do CEB-FIP (2010). O modelo do MAYA *et al.* (2012), apesar de apresentar resultados relativamente precisos (Med = 1,06, CV = 21,70% e Penal.<sub>DPC</sub> = 122), foi significativamente penalizado na análise da influência da altura útil, principalmente na classe D3 ( $d > 300$  mm), que representa as situações práticas nas construções residenciais e comerciais. Por fim, conclui-se que a contribuição das fibras pode ser incorporada nos modelos de flexão a partir das tensões residuais (obtidas nos ensaios de flexão), ou a partir dos valores do volume de fibras, do fator de forma, da tensão de aderência *fibra-concreto*, entre outras informações que definem o CRFA, pois ambas as considerações podem conduzir a resultados satisfatórios.

No que diz respeito à simulação da relação *momento-curvatura* ( $M-\Phi$ ) das vigas de BARROS e FIGUEIRAS (1999), concluiu-se que conhecer o valor da tensão residual do concreto com fibras é fundamental e imprescindível na análise de flexão de vigas em CRFA, pois é essa grandeza que define a performance estrutural da viga. A partir da análise da influência da armadura de flexão, confirmou-se, de um modo geral, que nas vigas densamente armadas, a utilização de fibras não é recomendada, pois a armadura convencional assume um papel preponderante no controle da fissuração, o que limita o desempenho das fibras. Adicionalmente, é importante comentar que se confirmou a possibilidade da fibra de aço substituir o reforço convencional do concreto armado (comparar V60, $\rho$  e V0,4 $\rho$ ). Para a análise da influência da resistência à tração do concreto, verificou-se que a ausência de resultados experimentais pode conduzir a análises contra a segurança, visto que na ausência de ensaios, utiliza-se o parâmetro  $f_{ctm}$  para representar a referida resistência. Nessas condições, sempre que a expressão de  $f_{ctm}$  não representar adequadamente a resistência à tração do concreto, análises contra a segurança podem ser estabelecidas. Por fim, baseado na análise da influência da resistência à compressão do concreto, constatou-se que para uma dosagem adequada, independentemente da classe de resistência do concreto, as tensões residuais incorporadas ao CRFA tracionado foram suficientes para garantir o comportamento dúctil das vigas (comparar vigas do grupo V0 com as vigas dos grupos V30 e V60). Desta maneira, ficou confirmada a qualidade das fibras, quando utilizada em proporções apropriadas, em atribuir ductilidade aos concretos de elevada resistência.

## 7.2. Sugestões para Trabalhos Futuros

Sugere-se que futuramente seja realizado um trabalho experimental visando avaliar não somente a precisão dos códigos e dos modelos teóricos, mas os diversos fatores que ainda impõem certa imprecisão neste. Fatores estes como a existência ou não de armadura de flexão, altura útil da viga e as tensões residuais geradas pelas fibras. Sendo a tensão residual o principal ponto de divergência entre os códigos e modelos analisados.

Sugere-se também a confecção de vigas de CRFA para demonstrar experimentalmente uma das conclusões do trabalho, embasada pela análise *momento-curvatura* ( $M-\Phi$ ): que é possível substituir completa ou parcialmente a armadura longitudinal pela adição de fibras de aço com a manutenção do momento resistente da seção transversal.



## Referências Bibliográficas

1. ABNT NBR 15530 (2007). **Fibras de aço para concreto – Especificações**. ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas.
2. ABNT NBR NM 67 (1998). **Concreto - Determinação da consistência pelo abatimento do tronco de cone**. Associação Brasileira de Normas Técnicas.
3. ACI 318 (2011). **Building Code Requirements for Structural Concrete**, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2011.
4. ACI 544.1R-96 (1996). **State-of-the-art report on fiber reinforced concrete**. Reported by ACI Committee 544, American Concrete Institute.
5. ACI 544.4R-88 (1988). **Design Considerations for Steel Fiber Reinforced Concrete**. Reported by ACI Committee 544, American Concrete Institute.
6. ALTUN, F.; HAKTANIR, T.; ARI, K. (2005). **Effects of steel fiber addition on mechanical properties of concrete and RC beams**. Construction and Building Materials, v. 21, pg. 654-661, 2007.
7. ASHOUR, S.A.; WAFA, F.F. (1993). **Flexural Behavior of High-Strength Fiber Reinforced Concrete Beams**. ACI Structural Journal, v. 90, no. 3, pg. 279-287, 1993.
8. ASHOUR, S.A.; WAFA, F.F.; KAMAL, M.I. (2000). **Effect of the concrete compressive strength and tensile reinforcement ratio on the flexural behavior of fibrous concrete beams**. Engineering Structures, v. 22, pg. 1145-1158, 2000.
9. ASTM C995 (2008). **Standard Test Method for Time of Flow of Fiber-Reinforced Concrete Trough Inverted Cone Slump**. American Society for Testing and Materials, United States, 2008.
10. BARROS, J.A.O.; FIGUEIRAS, J.A. (1999). **Flexural Behavior of SFRC: Testing and Modeling**. Journal of Materials in Civil Engineering, v. 11, no. 4, pg. 331-229, 1999.

11. BELLO, H.J. (2014). **Flexural behavior of lightly and heavily reinforced steel fiber concrete beams**. Tese de mestrado, Atilim University, Turquia, 2014.
12. BS 1881-104 (1983). **Testing Concrete Method for determination of Vebe Time**. British Standard Institution, 1983.
13. CEB-FIP (2010). **Model Code 2010: Final Draft**. Model Code prepared by Special Activity Group 5, Lausanne, September 2011.
14. CECS 38 (2004). **Technical specification for fiber reinforced concrete structures**. Chinese Standard, Pequim, China, 2004.
15. CHOI, K-K.; TAHA, M.M.R.; PARK, H-G.; MAJI, A.K. (2007). **Punching shear strength of interior concrete slab-column connection reinforced with steel fibers**. Cement & Concrete Composites, v. 29, pg. 409-420, 2007.
16. CHUNXIANG, Q.; PATNAIKUNI, I. (1999). **Properties of high-strength steel fiber-reinforced concrete beams in bending**. Cement & Concrete Composites. v. 21, pg. 73-81, 1999.
17. COLAJANNI, P.; MENDOLA, L.L.; PRIOLO, S.; SPINELLA, N. (2008). **Experimental Tests and FEM Model for SFRC Beams under Flexural and Shear Loads**. CP1020, 2008 Seismic Engineering Conference Commemorating the 1908 Messina e Reggio Earthquake, American Institute of Physics, pg. 872-879, 2008.
18. COLLINS, M.P. (2001). **Evaluation of shear design procedures for concrete structures**. A Report prepared for the CSA technical committee on reinforced concrete design, 2001.
19. CONFORTI, A.; MINELLI, F.; PLIZZARI, G.A. (2013). **Wide-shallow beams with and without steel fibres: A peculiar behaviour in shear and flexure**. Composites: Part B, v. 51, pg. 282-290, 2013.
20. DAfStb (2010). **Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. Technical Rule on Steel Fibre Reinforced Concrete**. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton e. V. – DAfStb, Berlin, 2010.

21. DANCYGIER, A.N.; SAVIR, Z. (2006). **Flexural behavior of HSFRC with low reinforcement ratios**. Engineering Structures, v. 28, pg. 1503-1512, 2006.
22. DIN 1045-1 (2001). **Plain, reinforced and prestressed concrete structures – Part 1: Design and construction**. Deutsche Norm, Berlim, Alemanha, 2001.
23. FIGUEIREDO, A. D. (2000). **Concreto com Fibras de Aço. Boletim Técnico – Série BT/PCC/260**, Escola Politécnica de São Paulo, São Paulo, Brasil.
24. FIGUEIREDO, A. D. (2005). **Concreto com fibras. IBRACON. Concreto: ensino, pesquisa e realidade**. São Paulo: Instituto Brasileiro do Concreto. Cap. 39, p 1195-1225.
25. GB 500010 (2002). **National Standard of the People’s Republic of China. Code for Design of Concrete Structures. GB 500010-2002**. China Construction Industrial Publishing House, Beijing, 2002.
26. HASSOUN, M.N.; SAHEBJAM, K. (1985). **Plastic Hinge in Two-Span Reinforced Concrete Beams Contain Steel Fibers**. Canadian Society for Civil Engineering, Montreal, pg. 119-139, 1985.
27. HENAGER, C.H., DOHERTY, T.J. (1976). **Analysis of reinforced fibrous concrete beams**. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 102 (1), pg. 178-188, 1976.
28. KANG, T.H-K.; KIM, W.; MASSONE, L.M.; GALLEGUILLLOS, T.A. (2012). **Shear-Flexure Coupling Behavior of Steel Fiber-Reinforced Concrete Beams**. ACI Structural Journal, v. 109, no. 4, pg. 435-444, 2012.
29. KHALIL, W.I.; TAYFUR, Y.R. (2013). **Flexural strength of fibrous ultra high performance reinforced concrete beams**. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, v. 8, no. 3, pg. 200-214, 2013.
30. KWAK, Y-K.; EBERHARD, M.O.; KIM, W-S.; KIM, J. (2002). **Shear Strength of Steel Fiber-Reinforced Concrete Beams without Stirrups**. ACI Structural Journal, v. 99, no. 4, pg. 530-538, 2002.

31. LIM, T.Y.; PARAMASIVAM, P.; LEE, S.L. (1987). **Analytical model for tensile behavior of steel-fiber concrete**. ACI Materials Journal, v. 84, no. 4, pg. 286-551, 1987.
32. LIMA, R.P.A.F.P. (2012). **Utilização de fibras metálicas com funções estruturais em estruturas de betão**. Tese de Mestrado, Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2012.
33. LOK, T-S.; PEI, J-S. (1998). **Flexural Behavior of Steel Fiber Reinforced Concrete**. Journal of Materials in Civil Engineering, v. 10, no. 2, p. 86-87, 1998.
34. LOPES, M.M. (2005). **Substituição parcial da armadura de flexão por fibra de aço em vigas de concreto**. Dissertação de mestrado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.
35. MANSUR, M.A.; ONG, K.C.G.; PARAMASIVAM, P. (1986). **Shear strength of fibrous concrete beams without stirrups**. Journal of Structural Engineering, v. 112, no. 9, pg. 2066-2079, 1986.
36. MAYA, L.F.; FERNÁNDEZ RUIZ, M.; MUTTONI, A.; FOSTER, S.J. (2012). **Punching shear strength of steel fibre reinforced concrete slabs**. Engineering Structures, v. 40, pg. 83-94, 2012.
37. MEDA, A.; MIELLI, F.; PLIZZARI, G.A. (2012). **Flexural behaviour of RC beams in fibre reinforced concrete**. Composite: Part B, v. 43, pg. 2930-2937, 2012.
38. MONDO, E. (2011). **Shear Capacity of Steel Fibre Reinforced Concrete Beams without Conventional Reinforcement**. Tese de Mestrado, Royal Institute of Technology, Stockolm, Suécia, 2011.
39. MONTAIGNAC, R.; MASSICOTTE, B.; CHARRON, J-P. (2011). **Design of SFRC structural elements: flexural bahaviour prediction**. Materials and Structures, v. 45, pg. 623-636, 2011.
40. MORAES NETO, B.N. (2013). **Comportamento à Punção de Lajes Lisas em Concreto Reforçado com Fibras de Aço sob Carregamento Simétrico**.

Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, Tese de Doutorado, Brasília, 2013.

41. NAAMAN, A. E. **Fiber Reinforcement for Concrete**. Concr Int Des Construct, 1985.
42. OH, B.H. (1992). **Flexural Analysis of Reinforced Concrete Beams Containing Steel Fibers**. **Journal of Structural Engineering**, v. 118, no. 10, pg. 2821-2835, 1992.
43. PEDERSEN, C. (1996). **New Production Process, Materials and Calculation Techniques for Fiber Reinforced Concrete Pipes**. Industrial Research Project, EF 418, Technical University of Denmark, 1996.
44. RAMOULDI, J. P.; BASTON, G. B. (1963). **Mechanics of crack arrest in concrete**. Proc. ASCE Engineering Mechanical Journal, v. 89, pg. 147-168, 1963.
45. RAMOULDI, J. P.; MANDEL, J. A. (1964). **Tensile strength of concrete affected by uniformly distributed closely space short lengths of wire reinforcement**. Journal ACI, v. 61, no. 6, pg. 657-671, 1964.
46. RAVINDRARAJAH, R.S.; TAM, C.T. (1984). **Flexural strength of steel fibre reinforced concrete beams**. The International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, v. 6, no. 4, pg. 273-278, 1984.
47. RILEM TC 162-TDF (2002). **Test and design methods for steel fibre reinforced concrete: Bending Test, Final Recommendation**. Materials and Structures, v. 35, pg. 579-582, November, 2002.
48. RILEM TC 162-TDF (2003). **Test and design methods for steel fibre reinforced concrete:  $\sigma$ - $\varepsilon$  Design method, Final Recommendation**. Materials and Structures, v. 35, pg. 579-582, November, 2002
49. SAHOO, D.R.; SHARMA, A. (2014). **Effect of Steel Fiber Content on Behavior of Concrete Beams with and without Stirrups**. ACI Structural Journal, v. 111, no. 5, pg. 1157-1166, 2014.

50. SORANAKOM, C.; MOBASCHER, B. (2007). **Closed-Form Solutions for Flexural Response of Fiber-Reinforced Concrete Beams**. Journal of Engineering Mechanics, v. 133, no. 8, pg. 933-941, 2007.
51. TAN, K.H.; PARAMASIVAM, P.; TAN, K.C. (1994). **Instantaneous and Long-Term Deflections of Steel Fiber-Reinforced Concrete Beams**. ACI Structural Journal, v. 91, no. 4, pg. 384-392, 1994.
52. VARMA, R. K. (2012). **Numerical models for the simulation of the cycle behaviour of RC structures incorporating new advanced materials**. Tese de Phd, Universidade do Minho, Escola de Engenharia, Portugal, 2012.
53. ZIJL, G.P.A.G.; MBEWE, P.B.K. (2013). **Flexural modeling of steel fibre-reinforced concrete beams with and without steel bars**. Engineering Structures, v. 53, pg. 52-62, 2013.

## Anexo A – Cálculo do Momento Resistente

### Anexo A.1 – Cálculo do Momento Resistente segundo o ACI 544.4R-88

O cálculo do momento resistente ( $M_R$ ) é baseado nas deformações e tensões presentes na figura A.1.1.

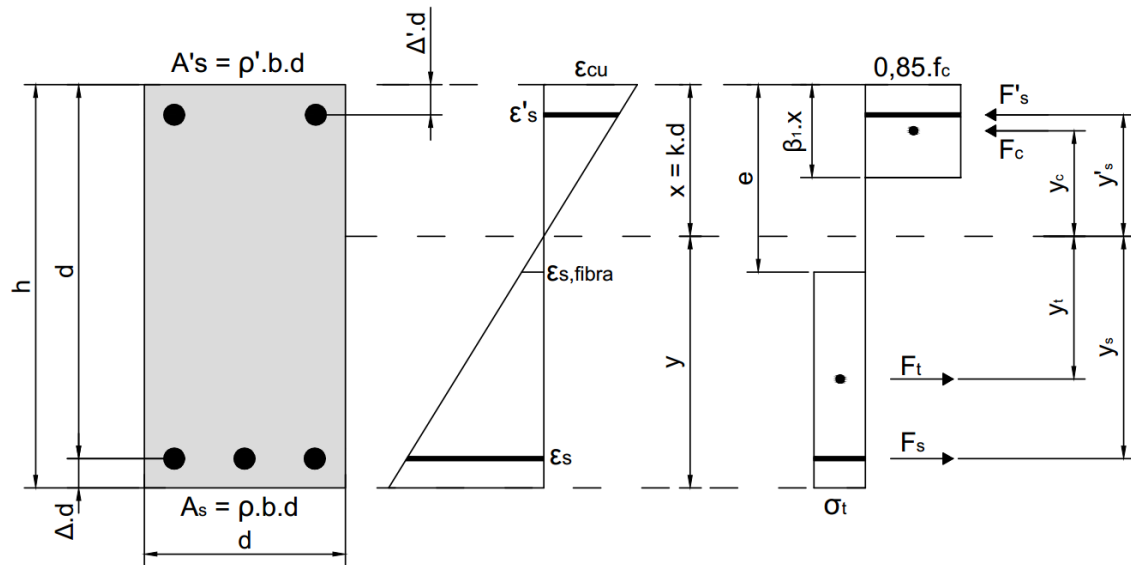


Figura A.1.1 – Modelo de flexão proposto pelo ACI 544.4R-88.

O processo iterativo inicia-se fixando o valor de  $\varepsilon_{cu} = 3,0\%$  e admitindo-se um valor para  $x = k \cdot d$ . Na sequência, são calculadas as demais deformações, conforme as equações:

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (1 - k)}{k}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (k - \Delta')}{k}$$

As tensões nas armaduras são definidas por:

$$f_s = \begin{cases} \varepsilon_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s < f_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s \geq f_{sy} \end{cases}$$

$$f'_s = \begin{cases} \varepsilon'_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s < f'_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s \geq f'_{sy} \end{cases}$$

Os valores dos braços de alavanca presentes na figura A.1.1 são definidos pelas equações abaixo:

$$y_c = k \cdot d \cdot \left(1 - \frac{\beta_1}{2}\right)$$

$$y_t = h - kd - \left(\frac{h - e}{2}\right)$$

$$y_s = d \cdot (1 - k)$$

$$y'_s = (k - \Delta') \cdot d$$

As resultantes das forças internas são exibidas nas equações seguintes:

$$F_c = 0,85 \cdot \beta_1 \cdot f_c \cdot k \cdot d \cdot b$$

$$F_t = \sigma_t \cdot b \cdot (h - e) \cdot d \cdot b$$

$$F_s = f_s \cdot \rho \cdot d \cdot b$$

$$F'_s = f_s \cdot \rho' \cdot d \cdot b$$

O equilíbrio das resultantes das forças internas ocorre quando:

$$\sum F_i = 0$$

Depois de ser observado o equilíbrio interno da seção, o cálculo de  $M_R$  é dado por:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i$$

## **Anexo A.2 – Cálculo do Momento Resistente segundo o RILEM TC 162-TDF (2003)**

O cálculo do momento resistente ( $M_R$ ) é baseado nas deformações e tensões presentes na figura A.2.1.



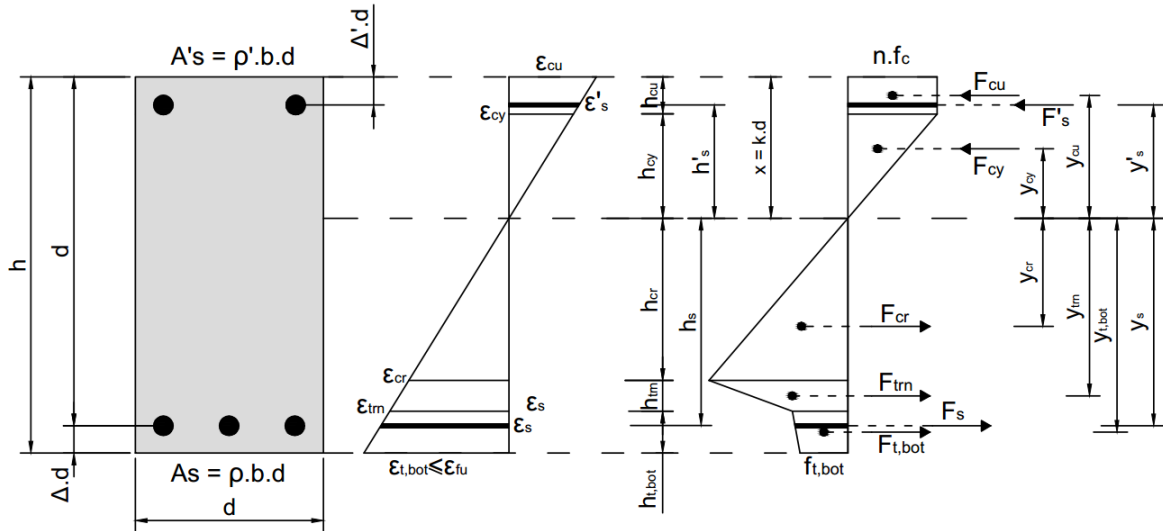


Figura A.2.1 – Modelo de flexão proposto pelo RILEM TC 162-TDF (2003).

O processo iterativo inicia-se fixando o valor de  $\epsilon_{cu}$  e admitindo-se um valor para  $x=k \cdot d$ . Na sequência, são calculadas as demais deformações, conforme as equações:

$$\epsilon_{cu} = \left\{ \begin{array}{l} 3,5 \quad \text{se } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 2,6 + 35 \left[ \frac{90 - (f_c - 8)}{100} \right]^4 \quad \text{se } f_c > 58 \text{ MPa} \end{array} \right\} \quad \text{se } \epsilon_s \leq 25 \quad (\%)$$

$$\frac{\epsilon_s \cdot k}{1 - k} \quad \text{se } \epsilon_s > 25$$

$$\epsilon_{cy} = \left\{ \begin{array}{l} 1,75 \quad \text{se } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 1,75 + \frac{0,55}{40} \cdot [(f_c - 8) - 50] \quad \text{se } f_c > 58 \text{ MPa} \end{array} \right\} \quad (\%)$$

$$\epsilon_{cr} = \epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_c} = \frac{f_{cr}}{E_c}$$

$$\epsilon_{trn} = \epsilon_2 = \epsilon_{cr} + 0,1 \quad (\%)$$

$$\epsilon_{t,bot} = \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k + \Delta)}{k}$$

$$\epsilon_s = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k)}{k} \quad \text{se } \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k)}{k} \leq 25 \\ 25 \quad \text{se } \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k)}{k} > 25 \end{array} \right\} \quad (\%)$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (k - \Delta')}{k}$$

As grandezas  $\varepsilon_{cu}$  e  $\varepsilon_{cy}$  forma determinadas conforme as recomendações do CEB-FIP (2010). As demais tensões são definidas pelo RILEM TC 162-TDF (2003) e são dadas pelas equações.

$$f_{cr} = \sigma_1 = 0,7 \cdot f_{ctm,t} \cdot \left(1,6 - \frac{d}{1000}\right) \quad (MPa, mm)$$

$$f_{trn} = \sigma_2 = 0,45 \cdot f_{R,1} \cdot k_h$$

$$f_{t,bot} = \sigma_3 = 0,37 \cdot f_{R,4} \cdot k_h$$

$$f_s = \begin{cases} \varepsilon_s \cdot E_s & se \quad \varepsilon_s \cdot E_s < f_{sy} \\ f_y & se \quad \varepsilon_s \cdot E_s \geq f_{sy} \end{cases}$$

$$f'_s = \begin{cases} \varepsilon'_s \cdot E_s & se \quad \varepsilon'_s \cdot E_s < f'_{sy} \\ f_y & se \quad \varepsilon'_s \cdot E_s \geq f'_{sy} \end{cases}$$

onde,

$$f_{R1} = 7,5 \cdot \left(V_f \cdot l_f / d_f\right)^{0,8}$$

$$f_{R4} = 5,5 \cdot \left(V_f \cdot l_f / d_f\right)^{0,65}$$

O valor de  $f_{m,f}$  foi calculado seguindo as recomendações do CEB-FIP (2010), dado pela equação:

$$f_{ctm,f} = f_{ctm} \cdot \frac{1 + 0,006 \cdot h^{0,7}}{0,006 \cdot h^{0,7}}$$

sendo,

$$f_{ctm} = \begin{cases} 0,3 \cdot (f_c - 8)^{2/3} & \text{se } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 2,12 \cdot \ln(1 + 0,1 \cdot f_c) & \text{se } f_c > 58 \text{ MPa} \end{cases}$$

As alturas das regiões indicadas como  $h_i$  na figura A.2.1, são relativas às equações abaixo:

$$h_{cy} = \frac{\varepsilon_{cy} \cdot k \cdot d}{\varepsilon_{cu}}$$

$$h_{cu} = (k \cdot d) - h_{cy}$$

$$h_{cr} = \frac{\varepsilon_{cr} \cdot k \cdot d}{\varepsilon_{cu}}$$

$$h_{trn} = \frac{\varepsilon_{trn} \cdot k \cdot d - \varepsilon_{cu} \cdot h_{cr}}{\varepsilon_{cu}}$$

$$h_{t,bot} = (1 - k + \Delta) \cdot d - h_{cr} - h_{trn}$$

$$h_s = y_s$$

$$h'_s = y'_s$$

Já os valores dos braços de alavanca são definidos pelas equações:

$$y_{cy} = \frac{2}{3} \cdot h_{cy}$$

$$y_{cu} = h_{cu} + \frac{h_{cy}}{2}$$

$$y_{cr} = \frac{2}{3} \cdot h_{cr}$$

$$y_{trn} = h_{trn} + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{f_{cr} + 2 \cdot f_{trn}}{f_{cr} + f_{trn}} \right)$$

$$y_{t,bot} = h_{cr} + h_{trn} + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{f_{trn} + 2 \cdot f_{t,bot}}{f_{trn} + f_{t,bot}} \right)$$

$$y_s = d \cdot (1 - k)$$

$$y'_s = (k - \Delta') \cdot d$$

As resultantes das forças internas são exibidas nas equações seguintes:

$$F_{cu} = \eta \cdot f_c \cdot h_{cu} \cdot b$$

$$F_{cy} = \eta \cdot f_c \cdot \frac{h_{cy} \cdot b}{2}$$

$$F_{cr} = f_{cr} \cdot \frac{h_{cr} \cdot b}{2}$$

$$F_{trn} = (f_{cr} + f_{trn}) \cdot \frac{h_{trn} \cdot b}{2}$$

$$F_{t,bot} = (f_{trn} + f_{t,bot}) \cdot \frac{h_{t,bot} \cdot b}{2}$$

$$F_s = f_s \cdot \rho \cdot d \cdot b$$

$$F'_s = f_s \cdot \rho' \cdot d \cdot b$$

O equilíbrio das resultantes das forças internas ocorre quando:

$$\sum F_i = 0$$

Depois de ser observado o equilíbrio interno da seção, o cálculo de  $M_R$  é dado por:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i$$

### **Anexo A.3 – Cálculo do Momento Resistente segundo o CECS 38 (2004)**

O cálculo do momento resistente ( $M_R$ ) é baseado nas deformações e tensões presentes na figura A.3.1.

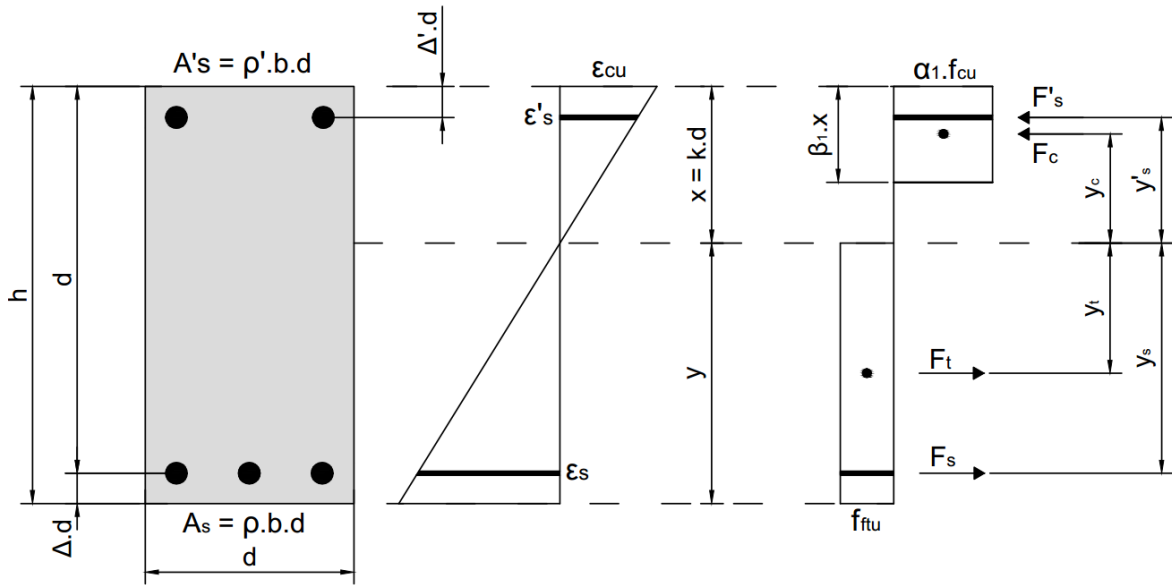


Figura A.3.1 – Modelo de flexão segundo o CECS 38 (2004).

O processo iterativo inicia-se fixando o valor de  $\varepsilon_{cu} = 3,3\%$  e admitindo-se um valor para  $x = k \cdot d$ . Na sequência, são calculadas as demais deformações, conforme as equações:

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (1 - k)}{k}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (k - \Delta')}{k}$$

As tensões nas armaduras são definidas por:

$$f_s = \begin{cases} \varepsilon_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s < f_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s \geq f_{sy} \end{cases}$$

$$f'_s = \begin{cases} \varepsilon'_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s < f'_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s \geq f'_{sy} \end{cases}$$

Os valores dos braços de alavanca presentes na figura A.3.1 são definidos pelas equações abaixo:

$$y_c = k \cdot d \cdot \left(1 - \frac{\beta_1}{2}\right)$$

$$y_t = \frac{d}{2} (1 - k + \Delta)$$

$$y_s = d \cdot (1 - k)$$

$$y'_s = (k - \Delta') \cdot d$$

As resultantes das forças internas são exibidas nas equações seguintes:

$$F_c = \alpha_{c1} \cdot \beta_1 \cdot f_{cu} \cdot k \cdot d \cdot b$$

$$F_t = f_{ftu} \cdot (1 - k + \Delta) \cdot d \cdot b$$

$$F_s = f_s \cdot \rho \cdot d \cdot b$$

$$F'_s = f_s \cdot \rho' \cdot d \cdot b$$

O equilíbrio das resultantes das forças internas ocorre quando:

$$\sum F_i = 0$$

Depois de ser observado o equilíbrio interno da seção, o cálculo de  $M_R$  é dado por:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i$$

#### **Anexo A.4 – Cálculo do Momento Resistente segundo o CEB-FIP (2010)**

O cálculo do momento resistente ( $M_R$ ) é baseado nas deformações e tensões presentes na figura A.4.1.

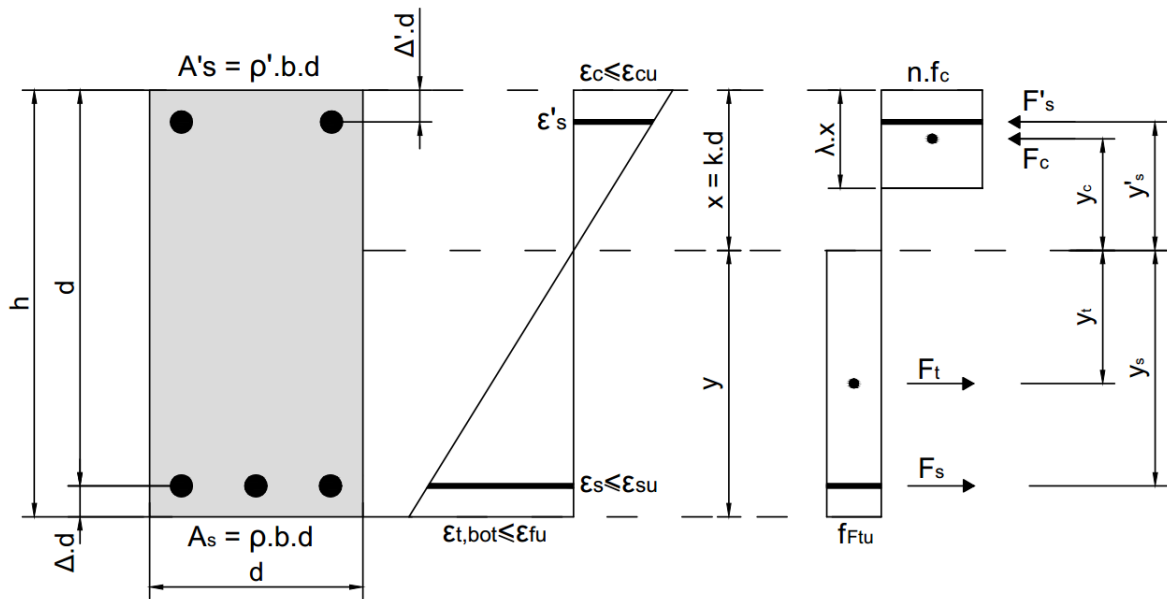


Figura A.4.1 – Deformações e tensões numa seção transversal segundo o CEB-FIP (2010).

O processo iterativo inicia-se fixando o valor de  $\epsilon_{cu}$  e admitindo-se um valor para  $x=k \cdot d$ . Na sequência, são calculadas as demais deformações, conforme as equações:

$$\epsilon_{fu} = \frac{w_u}{l_{cs}} \quad \{l_{cs} = \min(s_{rm}, y)\}$$

$$\epsilon_{cu} = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} 3,5 \quad \text{se } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 2,6 + 35 \left[ \frac{90 - (f_c - 8)}{100} \right]^4 \quad \text{se } f_c > 58 \text{ MPa} \end{array} \right\} & \text{se } \epsilon_{t,bot} \leq \epsilon_{fu} \\ \frac{\epsilon_{t,bot} \cdot k}{(1 - k + \Delta)} & \text{se } \epsilon_{t,bot} > \epsilon_{fu} \end{cases} \quad (\text{\%})$$

$$\epsilon_{t,bot} = \begin{cases} \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k + \Delta)}{k} & \text{se } \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k + \Delta)}{k} \leq \epsilon_{fu} \\ \epsilon_{fu} & \text{se } \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k + \Delta)}{k} > \epsilon_{fu} \end{cases} \quad [\text{\%}]$$

$$\epsilon_s = \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k)}{k}$$

$$\epsilon'_s = \frac{\epsilon_{cu} \cdot (k - \Delta')}{k}$$

As tensões nas armaduras são definidas por:

$$f_s = \begin{cases} \varepsilon_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s < f_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s \geq f_{sy} \end{cases}$$

$$f'_s = \begin{cases} \varepsilon'_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s < f'_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s \geq f'_{sy} \end{cases}$$

Os valores dos braços de alavanca presentes na figura A.4.1 são definidos pelas equações abaixo:

$$y_c = k \cdot d \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$y_t = \frac{d}{2}(1 - k + \Delta)$$

$$y_s = d \cdot (1 - k)$$

$$y'_s = (k - \Delta') \cdot d$$

As resultantes das forças internas são exibidas nas equações seguintes:

$$F_c = \eta \cdot \beta_1 \cdot f_{cu} \cdot k \cdot d \cdot b$$

$$F_t = f_{ftu} \cdot (1 - k + \Delta) \cdot d \cdot b$$

$$F_s = f_s \cdot \rho \cdot d \cdot b$$

$$F'_s = f'_s \cdot \rho' \cdot d \cdot b$$

O equilíbrio das resultantes das forças internas ocorre quando:

$$\sum F_i = 0$$

Depois de ser observado o equilíbrio interno da seção, o cálculo de  $M_R$  é dado por:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i$$

## Anexo A.5 – Cálculo do Momento Resistente segundo o DAfStb (2010)



O cálculo do momento resistente ( $M_R$ ) é baseado nas deformações e tensões presentes na figura A.5.1.

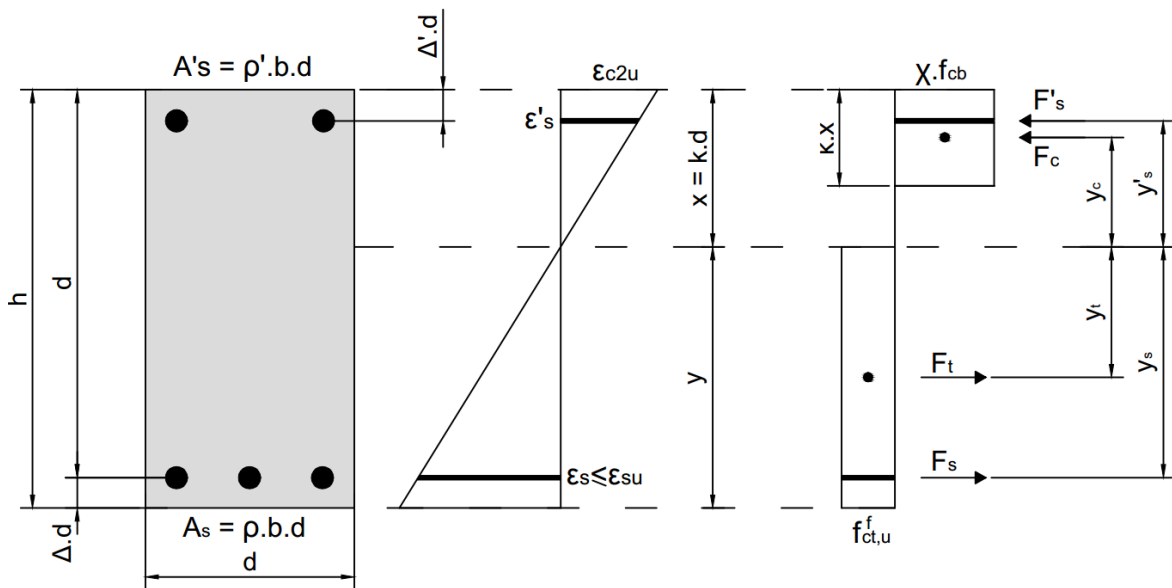


Figura A.5.1 – Modelo de flexão proposto pelo DAfStb (2010).

O processo iterativo inicia-se fixando o valor de  $\varepsilon_{c2u}$  e admitindo-se um valor para  $x=k.d$ . Na sequência, são calculadas as demais deformações, conforme as equações:

$$\varepsilon_{c2u} = \begin{cases} \varepsilon_{c2u} & \text{se } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \\ \frac{\varepsilon_{su} \cdot k}{(1 - k + \Delta)} & \text{se } \varepsilon_s > \varepsilon_{su} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{su} = 25\text{‰}$$

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{c2u} \cdot (1 - k)}{k}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{c2u} \cdot (k - \Delta')}{k}$$

As tensões nas armaduras são definidas por:

$$f_s = \begin{cases} \varepsilon_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s < f_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s \geq f_{sy} \end{cases}$$

$$f'_s = \begin{cases} \varepsilon'_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s < f'_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s \geq f'_{sy} \end{cases}$$

Os valores dos braços de alavanca presentes na figura A.5.1 são definidos pelas equações:

$$y_c = k \cdot d \cdot \left(1 - \frac{\kappa}{2}\right)$$

$$y_t = \frac{d}{2}(1 - k + \Delta)$$

$$y_s = d \cdot (1 - k)$$

$$y'_s = (k - \Delta') \cdot d$$

As resultantes das forças internas são exibidas nas equações seguintes:

$$F_c = \kappa \cdot \chi \cdot f_{cb} \cdot k \cdot d \cdot b$$

$$F_t = f_{ct,u}^f \cdot (1 - k + \Delta) \cdot d \cdot b$$

$$F_s = f_s \cdot \rho \cdot d \cdot b$$

$$F'_s = f_s \cdot \rho' \cdot d \cdot b$$

O equilíbrio das resultantes das forças internas ocorre quando:

$$\sum F_i = 0$$

Depois de ser observado o equilíbrio interno da seção, o cálculo de  $M_R$  é dado por:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i$$

### **Anexo A.6 – Cálculo do Momento Resistente segundo LOK e PEI (1998)**

O cálculo do momento resistente ( $M_R$ ) é baseado nas deformações e tensões presentes na figura A.6.1.

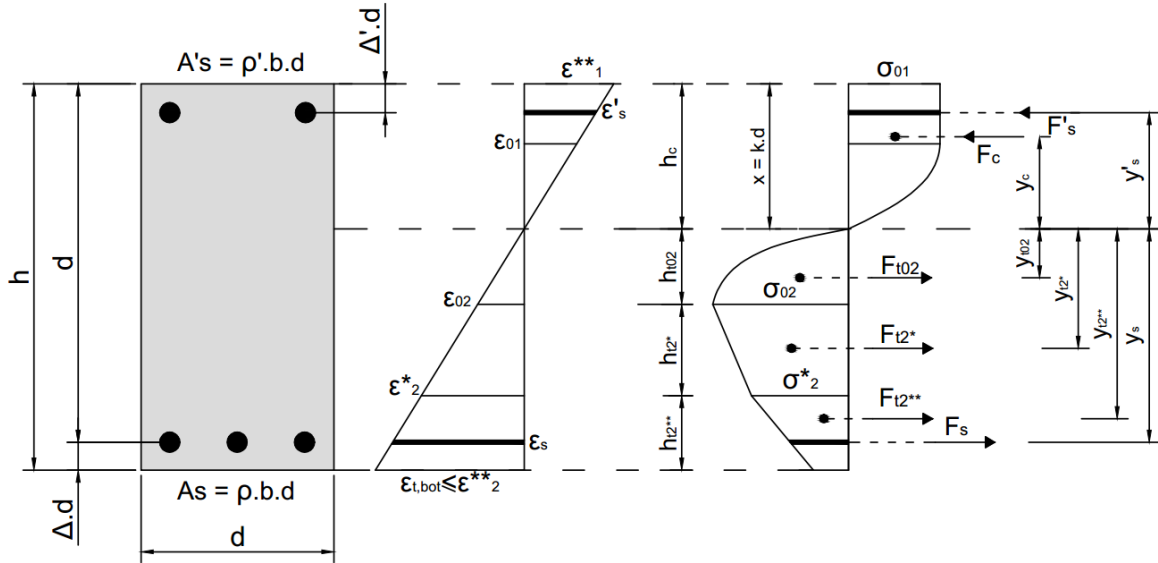


Figura A.6.1 – Modelo de flexão proposto por LOK e PEI (1998).

O processo iterativo inicia-se fixando o valor de  $\varepsilon_1^{**}$  e admitindo-se um valor para  $x=k \cdot d$ . Na sequência, são calculadas as demais deformações, conforme as equações:

$$\varepsilon_2^{**} = 20\text{‰}$$

$$\varepsilon_1^{**} = \begin{cases} 3,5 & \text{se } \varepsilon_{t,bot} \leq \varepsilon_2^{**} \\ \frac{\varepsilon_2^{**} \cdot k}{(1 - k + \Delta)} & \text{se } \varepsilon_{t,bot} > \varepsilon_2^{**} \end{cases} \quad (\text{‰})$$

$$\varepsilon_{t,bot} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (1 - k)}{k} & \text{se } \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (1 - k)}{k} \leq \varepsilon_2^{**} \\ \varepsilon_2^{**} & \text{se } \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (1 - k)}{k} > \varepsilon_2^{**} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{01} = 2,4 \cdot \sqrt{f_{cu}} \quad [\text{‰}, \text{MPa}]$$

$$\varepsilon_{02} = \varepsilon_{01} / \sigma_{01} \cdot \sigma_{02}$$

$$\varepsilon_2^* = \tau_d \cdot \frac{l_f}{d_f \cdot E_{fp}}$$

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (1 - k)}{k}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (k - \Delta')}{k}$$

As tensões nas armaduras são definidas por:

$$f_s = \begin{cases} \varepsilon_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s < f_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s \geq f_{sy} \end{cases}$$

$$f'_s = \begin{cases} \varepsilon'_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s < f'_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s \geq f'_{sy} \end{cases}$$

As alturas das regiões indicadas como  $h_i$  na figura A.6.1, são relativas às equações abaixo:

$$h_c = k \cdot d$$

$$h_{t02} = d \cdot (1 - k) \cdot \frac{\varepsilon_{02}}{\varepsilon_s}$$

$$h_{t2*} = d \cdot (1 - k) \cdot \frac{(\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02})}{\varepsilon_s}$$

$$h_{t2**} = d \cdot (1 - k) \cdot \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_2^*)}{\varepsilon_s}$$

Os valores de  $y_c$  e  $y_{t02}$  são os centros de gravidade da parte não linear da distribuição de tensão ao longo da seção transversal e são representados pelas equações:

$$y_c = k \cdot d \cdot \frac{\left( \frac{2}{3} \left( \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_1^{**}} \right)^2 + \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_1^{**}} \right) \right)^2 \right)}{\left( \frac{\varepsilon_{01}}{2} \cdot \varepsilon_1^{**} \right) + \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_1^{**}} \right) \right)}$$

$$y_{t02} = \frac{h_{t02}}{4}$$

Os demais valores de braços de alavanca presentes na figura A.6.1 são definidos pelas equações:

$$y_{t2*} = h_{t02} + \frac{\left( h_{t2*} \cdot \left( \frac{\sigma_2^*}{2} + \frac{\sigma_{02} - \sigma_2^*}{6} \right) \right)}{\sigma_2^* + \left( \frac{\sigma_{02} - \sigma_2^*}{2} \right)}$$

$$y_{t2**} = h_{02} + h_{t2*} + \frac{\left( h_{t2**} \cdot \left( \frac{\sigma_s}{2} + \frac{\sigma_2^* - \sigma_s}{6} \right) \right)}{\sigma_s + \left( \frac{\sigma_2^* - \sigma_s}{2} \right)}$$

$$y_s = d \cdot (1 - k)$$

$$y'_s = (k - \Delta') \cdot d$$

As resultantes  $F_c$  e  $F_{t02}$  são relativas às partes não linear das tensões ao longo da seção, dadas pelas equações:

$$F_c = \sigma_{01} \cdot k \cdot d \cdot b \cdot \left( \varepsilon_{01}/2 \cdot \varepsilon_1^{**} + \left( 1 - \varepsilon_{01}/\varepsilon_1^{**} \right) \right)$$

$$F_{t02} = \frac{5 \cdot h_{t02} \cdot \sigma_{02} \cdot b}{3}$$

As outras resultantes das forças internas são exibidas nas equações seguintes:

$$F_{t2*} = \left( h_{t2*} \cdot \sigma_2^* + h_{t2*} \cdot \left( \frac{\sigma_{02} - \sigma_2^*}{2} \right) \right) \cdot b$$

$$F_{t2**} = \left( h_{t2*} \cdot \sigma_s + h_{t2**} \cdot \left( \frac{\sigma_2^* - \sigma_s}{2} \right) \right) \cdot b$$

$$F_s = f_s \cdot \rho \cdot d \cdot b$$

$$F'_s = f'_s \cdot \rho' \cdot d \cdot b$$

O equilíbrio das resultantes das forças internas ocorre quando:

$$\sum F_i = 0$$

Depois de ser observado o equilíbrio interno da seção, o cálculo de  $M_R$  é dado por:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i$$

### Anexo A.7 – Cálculo do Momento Resistente segundo CHOI *et al.* (2007)

O cálculo do momento resistente ( $M_R$ ) é baseado nas deformações e tensões presentes na figura A.7.1.

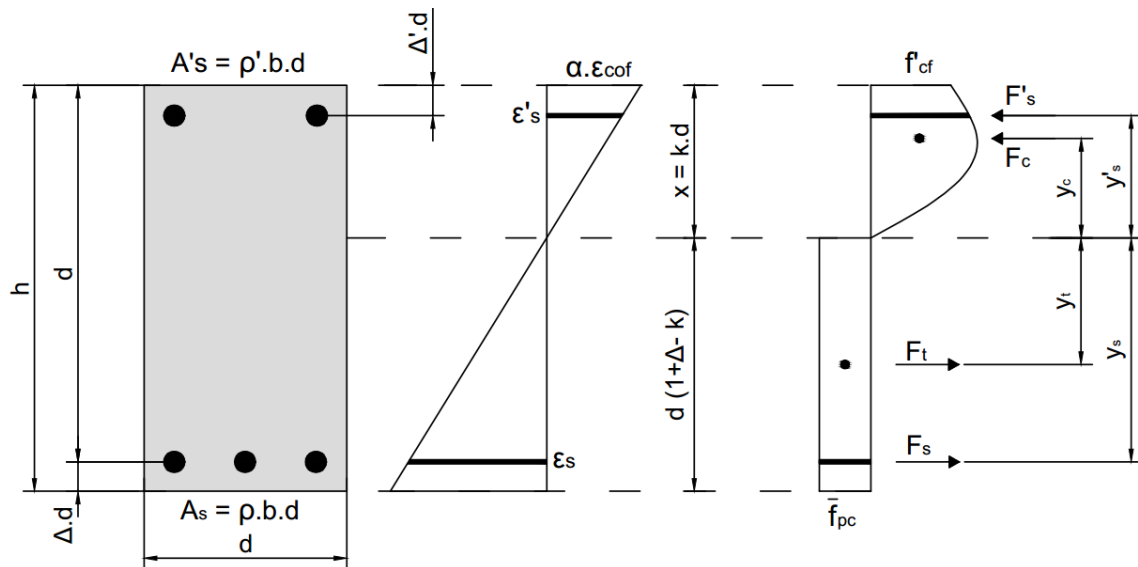


Figura A.7.1 – Modelo de flexão proposto por CHOI *et al.* (2007).

O processo iterativo inicia-se fixando o valor de  $\alpha \cdot \varepsilon_{cof} = 3,5\%$  e admitindo-se um valor para  $x = k \cdot d$ . Na sequência, são calculadas as demais deformações, conforme as equações:

$$\varepsilon_s = \frac{\alpha \cdot \varepsilon_{cof} \cdot (1 - k)}{k}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\alpha \cdot \varepsilon_{cof} \cdot (k - \Delta')}{k}$$

As tensões nas armaduras são definidas por:

$$f_s = \begin{cases} \varepsilon_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s < f_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s \geq f_{sy} \end{cases}$$

$$f'_s = \begin{cases} \varepsilon'_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s < f'_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s \geq f'_{sy} \end{cases}$$

O braço de alavanca do concreto,  $y_c$ , corresponde à parte não linear do material e segue a equação:

$$y_c = \frac{3 \cdot k \cdot d}{3 - \alpha \cdot \left(\frac{8 - 3\alpha}{12}\right)}$$

Os demais valores dos braços de alavanca presentes na figura A.7.1 são definidos pelas equações:

$$y_t = \frac{d}{2}(1 - k + \Delta)$$

$$y_s = d \cdot (1 - k)$$

$$y'_s = (k - \Delta') \cdot d$$

A resultante de força do concreto,  $F_c$ , corresponde à parte não linear do material e segue a equação:

$$F_c = f'_{cf} \cdot \alpha \cdot kd \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) \cdot b$$

As resultantes das forças internas são exibidas nas equações seguintes:

$$F_t = \overline{f_{pc}} \cdot (1 - k + \Delta) \cdot d \cdot b$$

$$F_s = f_s \cdot \rho \cdot d \cdot b$$

$$F'_s = f_s \cdot \rho' \cdot d \cdot b$$

O equilíbrio das resultantes das forças internas ocorre quando:

$$\sum F_i = 0$$

Depois de ser observado o equilíbrio interno da seção, o cálculo de  $M_R$  é dado por:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i$$

## Anexo A.8 – Cálculo do Momento Resistente segundo SORANAKOM e MOBASCHER (2007)

O cálculo do momento resistente ( $M_R$ ) é baseado nas deformações e tensões presentes na figura A.8.1.

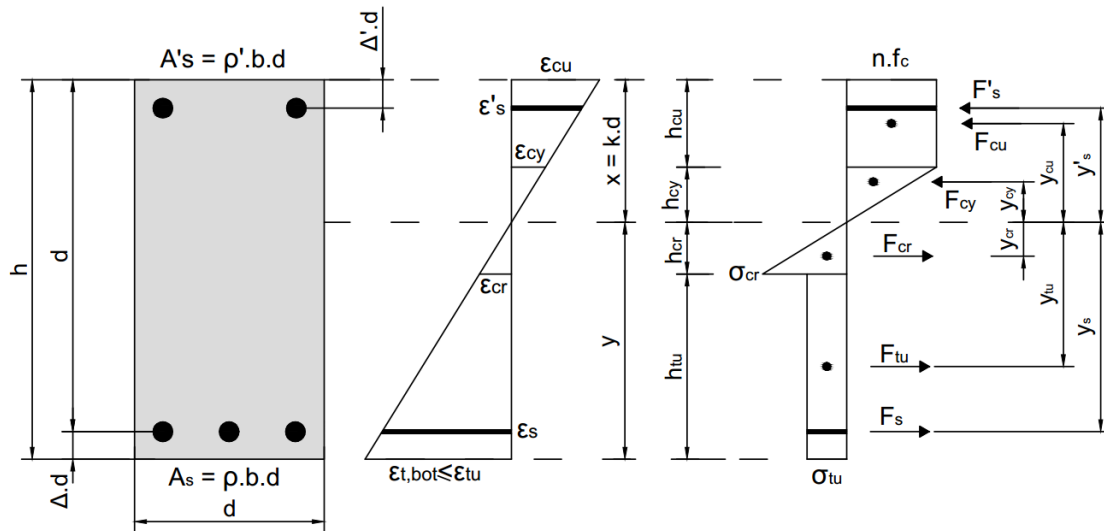


Figura A.8.1 – Modelo de flexão proposto por SORANAKOM e MOBASCHER (2007).

O processo iterativo inicia-se fixando o valor de  $\epsilon_{cu}$  e admitindo-se um valor para  $x=k \cdot d$ . Na sequência, são calculadas as demais deformações, conforme as equações:

$$\epsilon_{tu} = \frac{W_u}{S_{rm}}$$

$$\epsilon_{cu} = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} 3,5 \text{ se } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 2,6 + 35 \left[ \frac{90 - (f_c - 8)}{100} \right]^4 \text{ se } f_c > 58 \text{ MPa} \end{array} \right\} & \text{se } \epsilon_{t,bot} \leq \epsilon_{tu} \\ \frac{\epsilon_{t,bot} \cdot k}{(1 - k + \Delta)} & \text{se } \epsilon_{t,bot} > \epsilon_{tu} \end{cases} \quad (\%)$$

$$\epsilon_{cy} = \begin{cases} 1,75 & \text{se } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 1,75 + \frac{0,55}{40} \cdot [(f_c - 8) - 50] & \text{se } f_c > 58 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\%)$$

$$\epsilon_{t,bot} = \begin{cases} \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k + \Delta)}{k} & \text{se } \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k + \Delta)}{k} \leq \epsilon_{tu} \\ \epsilon_{tu} & \text{se } \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k + \Delta)}{k} > \epsilon_{tu} \end{cases} \quad (\%)$$



$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (1 - k)}{k}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (k - \Delta')}{k}$$

As tensões nas armaduras são definidas por:

$$f_s = \begin{cases} \varepsilon_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s < f_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s \geq f_{sy} \end{cases}$$

$$f'_s = \begin{cases} \varepsilon'_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s < f'_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s \geq f'_{sy} \end{cases}$$

As alturas das regiões indicadas como  $h_i$  na figura A.8.1, são relativas às equações abaixo:

$$h_{cy} = \frac{\varepsilon_{cy} \cdot k \cdot d}{\varepsilon_{cu}}$$

$$h_{cu} = (k \cdot d) - h_{cy}$$

$$h_{cr} = \frac{\varepsilon_{cr} \cdot k \cdot d}{\varepsilon_{cu}}$$

$$h_{tu} = (d \cdot (1 - k + \Delta)) - h_{cr}$$

Os valores dos braços de alavanca presentes na figura A.8.1 são definidos pelas equações:

$$y_{cy} = \frac{2}{3} \cdot h_{c1}$$

$$y_{cu} = h_{c1} + \frac{h_{c2}}{2}$$

$$y_{cr} = \frac{2}{3} \cdot h_{t1}$$

$$y_{t2} = h_{t1} + \frac{h_{t2}}{2}$$

$$y_s = d \cdot (1 - k)$$

$$y'_s = (k - \Delta') \cdot d$$

As resultantes das forças internas são exibidas nas equações seguintes:

$$F_{cu} = \eta \cdot f_c \cdot h_{cu} \cdot b$$

$$F_{cy} = \eta \cdot f_c \cdot \frac{h_{cy} \cdot b}{2}$$

$$F_{cr} = f_{cr} \cdot \frac{h_{cr} \cdot b}{2}$$

$$F_{tu} = \sigma_{tu} \cdot h_{tu} \cdot b$$

$$F_s = f_s \cdot \rho \cdot d \cdot b$$

$$F'_s = f_s \cdot \rho' \cdot d \cdot b$$

O equilíbrio das resultantes das forças internas ocorre quando:

$$\sum F_i = 0$$

Depois de ser observado o equilíbrio interno da seção, o cálculo de  $M_R$  é dado por:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i$$

### **Anexo A.9 – Cálculo do Momento Resistente segundo MAYA *et al.* (2012)**

O cálculo do momento resistente ( $M_R$ ) é baseado nas deformações e tensões presentes na figura A.9.1.

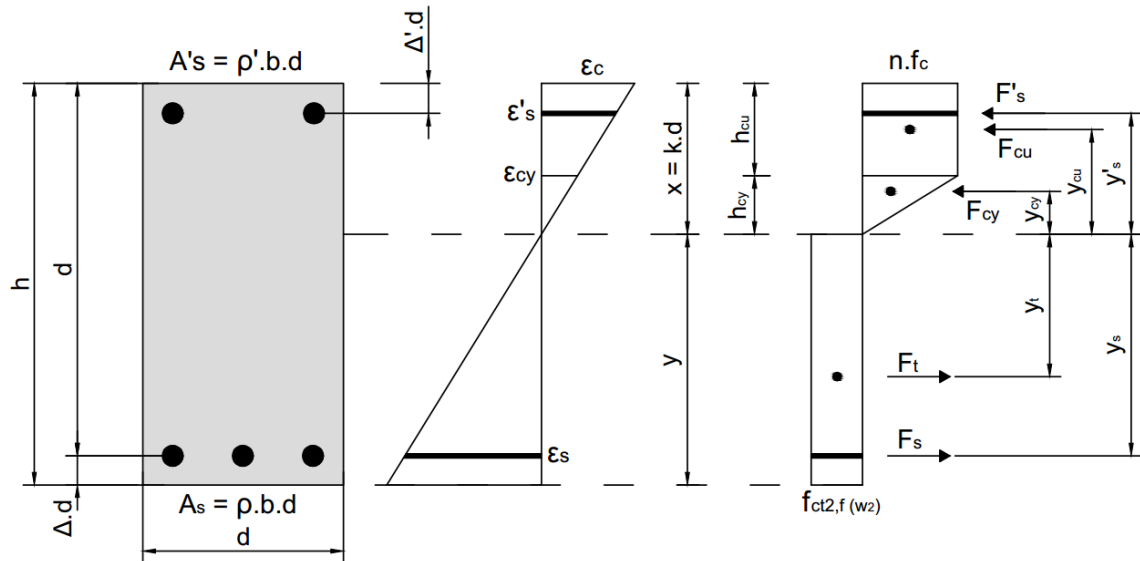


Figura A.9.1 – Modelo de flexão proposto por MAYA *et al.* (2012).

O processo iterativo inicia-se fixando o valor de  $\varepsilon_c$  e admitindo-se um valor para  $x=k \cdot d$ . Na sequência, são calculadas as demais deformações, conforme as equações:

$$\varepsilon_c = \begin{cases} 3,5 & \text{se } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 2,6 + 35 \left[ \frac{90 - (f_c - 8)}{100} \right]^4 & \text{se } f_c > 58 \text{ MPa} \end{cases} \quad [\%]$$

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (1 - k)}{k}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (k - \Delta')}{k}$$

As tensões nas armaduras são definidas por:

$$f_s = \begin{cases} \varepsilon_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s < f_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s \geq f_{sy} \end{cases}$$

$$f'_s = \begin{cases} \varepsilon'_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s < f'_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s \geq f'_{sy} \end{cases}$$

As alturas das regiões indicadas como  $h_i$  na figura A.9.1, são relativas às equações abaixo:

$$h_{cy} = \frac{\varepsilon_{cy} \cdot k \cdot d}{\varepsilon_{cu}}$$

$$h_{cu} = (k \cdot d) - h_{cy}$$

Os valores dos braços de alavanca presentes na figura A.9.1 são definidos pelas equações abaixo:

$$y_{cy} = \frac{2}{3} \cdot h_{cy}$$

$$y_{cu} = h_{cu} + \frac{h_{cy}}{2}$$

$$y_t = \frac{d}{2} (1 - k + \Delta)$$

$$y_s = d \cdot (1 - k)$$

$$y'_s = (k - \Delta') \cdot d$$

As resultantes das forças internas são exibidas nas equações seguintes:

$$F_{cu} = \eta \cdot f_c \cdot h_{cu} \cdot b$$

$$F_{cy} = \eta \cdot f_c \cdot \frac{h_{cy} \cdot b}{2}$$

$$F_t = f_{ct2,f(w2)} \cdot (1 - k + \Delta) \cdot d \cdot b$$

$$F_s = f_s \cdot \rho \cdot d \cdot b$$

$$F'_s = f_s \cdot \rho' \cdot d \cdot b$$

O equilíbrio das resultantes das forças internas ocorre quando:

$$\sum F_i = 0$$

Depois de ser observado o equilíbrio interno da seção, o cálculo de  $M_R$  é dado por:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i$$

## Anexo A.10 – Cálculo do Momento Resistente segundo ZIJL e MBEWE (2013)

O cálculo do momento resistente ( $M_R$ ) é baseado nas deformações e tensões presentes na figura A.10.1.

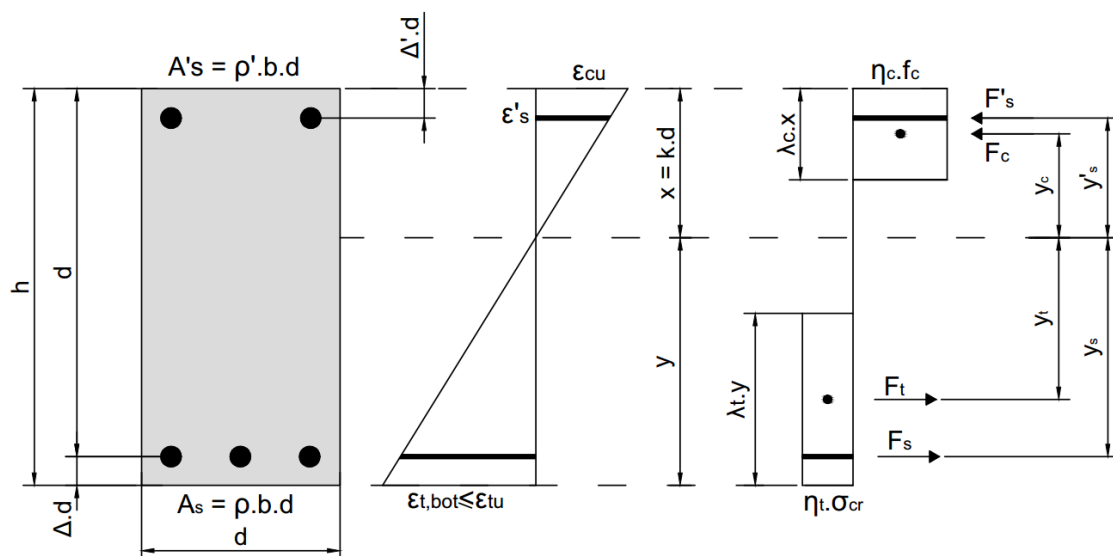


Figura A.10.1 – Modelo de flexão proposto por ZIJL e MBEWE (2013).

O processo iterativo inicia-se fixando o valor de  $\epsilon_{cu}$  e admitindo-se um valor para  $x=k \cdot d$ . Na sequência, são calculadas as demais deformações, conforme as equações:

$$\epsilon_{tu} = \frac{W_u}{S_{rm}}$$

$$\epsilon_{cu} = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} 3,5 \text{ se } f_c \leq 58 \text{ MPa} \\ 2,6 + 35 \left[ \frac{90 - (f_c - 8)}{100} \right]^4 \text{ se } f_c > 58 \text{ MPa} \end{array} \right\} & \text{se } \epsilon_{t,bot} \leq \epsilon_{tu} \\ \frac{\epsilon_{t,bot} \cdot k}{(1 - k + \Delta)} & \text{se } \epsilon_{t,bot} > \epsilon_{tu} \end{cases} \quad (\%)$$

$$\epsilon_{t,bot} = \begin{cases} \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k + \Delta)}{k} & \text{se } \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k + \Delta)}{k} \leq \epsilon_{tu} \\ \epsilon_{tu} & \text{se } \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k + \Delta)}{k} > \epsilon_{tu} \end{cases} \quad (\%)$$

$$\epsilon_s = \frac{\epsilon_{cu} \cdot (1 - k)}{k}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (k - \Delta')}{k}$$

As tensões nas armaduras são definidas por:

$$f_s = \begin{cases} \varepsilon_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s < f_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon_s \cdot E_s \geq f_{sy} \end{cases}$$

$$f'_s = \begin{cases} \varepsilon'_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s < f'_{sy} \\ f_y & \text{se } \varepsilon'_s \cdot E_s \geq f'_{sy} \end{cases}$$

Os valores dos braços de alavanca presentes na figura A.10.1 são definidos pelas equações:

$$y_c = k \cdot d \cdot \left(1 - \frac{\lambda_c}{2}\right)$$

$$y_t = d \cdot (1 - k + \Delta) \cdot \left(1 - \frac{\lambda_t}{2}\right)$$

$$y_s = d \cdot (1 - k)$$

$$y'_s = (k - \Delta') \cdot d$$

As resultantes das forças internas são exibidas nas equações seguintes:

$$F_c = \eta_c \cdot f_c \cdot \lambda_c \cdot k \cdot d \cdot b$$

$$F_t = \eta_t \cdot \sigma_{cr} \cdot \lambda_t \cdot d \cdot (1 - k + \Delta) \cdot b$$

$$F_s = f_s \cdot \rho \cdot d \cdot b$$

$$F'_s = f'_s \cdot \rho' \cdot d \cdot b$$

O equilíbrio das resultantes das forças internas ocorre quando:

$$\sum F_i = 0$$

Depois de ser observado o equilíbrio interno da seção, o cálculo de  $M_R$  é dado por:

$$M_R = \sum F_i \cdot y_i$$

## Anexo B – Banco de Dados

### Anexo B.1 – Banco de Dados

A tabela B.1.1 mostra as 142 vigas que compõem o banco de dados.

Tabela B.1.1 - Banco de dados (BD).

Autor	Vigas	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$V_f$ (%)	Tipo de fibra	$l_f/d_f$	$\rho$ (%)	$M_{exp.}$ (kN.m)
RAVINDRAR AJAH e TAM (1984)	Vf0,5	200	400	- <sup>(1)</sup>	30	0,50	<i>hooked end</i>	100	0,00	18,2
	Vf1,0	200	400	- <sup>(1)</sup>	34	1,00	<i>hooked end</i>	100	0,00	27,3
	Vf1,5	200	400	- <sup>(1)</sup>	34	1,50	<i>hooked end</i>	100	0,00	29,3
MANSUR <i>et al.</i> (1986)	B4	150,0	225	197,0	25	0,50	<i>hooked end</i>	60	1,36	32,9
	C3	150,0	225	197,0	25	0,75	<i>hooked end</i>	60	1,36	33,7
	C4	150,0	225	197,0	25	0,75	<i>hooked end</i>	60	1,36	35,5
	C5	150,0	225	200,0	25	0,75	<i>hooked end</i>	60	0,79	21,0
	D1	150,0	225	197,0	25	1,00	<i>hooked end</i>	60	1,36	36,6
	D2	150,0	225	197,0	25	1,00	<i>hooked end</i>	60	1,36	35,9
	D3	150,0	225	197,0	25	1,00	<i>hooked end</i>	60	1,36	35,8
	D4	150,0	225	197,0	25	1,00	<i>hooked end</i>	60	1,36	38,1
	E1	150,0	225	200,0	30	0,75	<i>hooked end</i>	60	0,79	19,6
	F1	150,0	225	200,0	30	0,75	<i>hooked end</i>	60	0,79	26,2
F2	150,0	225	197,0	30	0,75	<i>hooked end</i>	60	1,36	41,4	
OH (1992)	S1V1	120	180	140	43	1,00	<i>lisa</i>	57	1,51	15,2
	S1V2	120	180	140	48	2,00	<i>lisa</i>	57	1,51	18,0
	S2V1	120	180	140	43	1,00	<i>lisa</i>	57	2,36	22,6
	S2V2	120	180	140	48	2,00	<i>lisa</i>	57	2,36	23,4
	D2V1	120	180	140	43	1,00	<i>lisa</i>	57	3,41	28,4
	D2V2	120	180	140	48	2,00	<i>lisa</i>	57	3,41	31,0
ASHOUR e WAFSA (1993)	S-4-0.5	170	300	265	87	0,50	<i>hooked end</i>	75	1,39	116,5
	S-4-1.0	170	300	265	88	1,00	<i>hooked end</i>	75	1,39	122,8

<sup>(1)</sup> – Sem armadura de flexão.



Tabela B.1.1 - Banco de dados (BD) (Continuação).

Autor	Vigas	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$V_f$ (%)	Tipo de fibra	$l_f/d_f$	$\rho$ (%)	$M_{exp.}$ (kN.m)
ASHOUR e WAFI (1993)	S-4-1.5	170	300	265	91	1,50	<i>hooked end</i>	75	1,39	130,4
	S-6-0.5	170	300	265	87	0,50	<i>hooked end</i>	75	1,39	115,8
	S-6-1.0	170	300	265	88	1,00	<i>hooked end</i>	75	1,39	118,5
	S-6-1.5	170	300	265	91	1,50	<i>hooked end</i>	75	1,39	120,8
TAN <i>et al.</i> (1994)	BF	100	125	99	41	0,50	<i>hooked end</i>	60	1,59	6,9
	CF	100	125	99	42	1,00	<i>hooked end</i>	60	1,59	7,2
	DF	100	125	99	42	1,50	<i>hooked end</i>	60	1,59	7,2
	EF	100	125	99	41	2,00	<i>hooked end</i>	60	1,59	7,5
CHUNXIANG e PATNAIKUNI (1999)	IF	120	150	127	80	3,00	<i>lisa</i>	46	2,64	18,6
	IT	120	150	127	81	3,00	<i>lisa</i>	46	2,64	21,3
	IIF	120	150	127	96	2,50	<i>lisa</i>	38	2,64	20,1
	IIS	120	150	127	92	2,50	<i>lisa</i>	38	2,64	22,0
	IIT	120	150	127	92	2,50	<i>lisa</i>	38	2,64	19,3
	IIIF	120	150	127	85	2,50	<i>lisa</i>	45	2,64	18,9
	IIIS	120	150	127	81	2,50	<i>lisa</i>	45	2,64	18,0
ASHOUR <i>et al.</i> (2000)	B-0.5-N2	200	250	215	56	0,50	<i>hooked end</i>	75	1,18	60,2
	B-1.0-N2	200	250	215	65	1,00	<i>hooked end</i>	75	1,18	64,5
	B-0.5-N3	200	250	215	56	0,50	<i>hooked end</i>	75	1,78	83,8
	B-1.0-N3	200	250	215	65	1,00	<i>hooked end</i>	75	1,78	87,7
	B-0.5-N4	200	250	215	56	0,50	<i>hooked end</i>	75	2,37	103,1
	B-1.0-N4	200	250	215	65	1,00	<i>hooked end</i>	75	2,37	105,8
	B-0.5-M2	200	250	215	82	0,50	<i>hooked end</i>	75	1,18	63,3
	B-1.0-M2	200	250	215	87	1,00	<i>hooked end</i>	75	1,18	69,9
	B-0.5-M3	200	250	215	82	0,50	<i>hooked end</i>	75	1,78	89,6
	B-1.0-M3	200	250	215	87	1,00	<i>hooked end</i>	75	1,78	92,1
	B-0.5-M4	200	250	215	82	0,50	<i>hooked end</i>	75	2,37	113,6
	B-1.0-M4	200	250	215	87	1,00	<i>hooked end</i>	75	2,37	115,7
	B-0.5-H2	200	250	215	107	0,50	<i>hooked end</i>	75	1,18	62,6

Tabela B.1.1 - Banco de dados (BD) (Continuação).

Autor	Vigas	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$V_f$ (%)	Tipo de fibra	$l_f/d_f$	$\rho$ (%)	$M_{exp.}$ (kN.m)
ASHOUR <i>et al.</i> (2000)	B-1.0-H2	200	250	215	111	1,00	<i>hooked end</i>	75	1,18	69,3
	B-0.5-H3	200	250	215	107	0,50	<i>hooked end</i>	75	1,78	89,8
	B-1.0-H3	200	250	215	111	1,00	<i>hooked end</i>	75	1,78	95,6
	B-0.5-H4	200	250	215	107	0,50	<i>hooked end</i>	75	2,37	115,0
	B-1.0-H4	200	250	215	111	1,00	<i>hooked end</i>	75	2,37	120,6
KWAK <i>et al.</i> (2002)	FHB2-3	125	250	212	64	0,32	<i>hooked end</i>	63	1,52	52,1
	FHB3-3	125	250	212	69	0,32	<i>hooked end</i>	63	1,52	57,3
	FHB2-4	125	250	212	64	0,45	<i>hooked end</i>	63	1,52	54,2
	FHB3-4	125	250	212	69	0,45	<i>hooked end</i>	63	1,52	61,6
	FNB2-4	125	250	212	31	0,32	<i>hooked end</i>	63	1,52	44,9
ALTUN <i>et al.</i> (2005)	C20-4-30	150	300	261	23	0,40	<i>hooked end</i>	80	1,03	50,5
	C20-5-30	150	300	261	22	0,40	<i>hooked end</i>	80	1,03	50,6
	C20-6-30	150	300	261	22	0,40	<i>hooked end</i>	80	1,03	52,5
	C20-7-60	150	300	261	23	0,80	<i>hooked end</i>	80	1,03	52,6
	C20-8-60	150	300	261	23	0,80	<i>hooked end</i>	80	1,03	52,8
	C20-9-60	150	300	261	23	0,80	<i>hooked end</i>	80	1,03	52,3
	C30-4-30	150	300	261	31	0,40	<i>hooked end</i>	80	1,03	80,1
	C30-5-30	150	300	261	31	0,40	<i>hooked end</i>	80	1,03	82,5
	C30-6-30	150	300	261	31	0,40	<i>hooked end</i>	80	1,03	89,3
	C30-7-60	150	300	261	30	0,80	<i>hooked end</i>	80	1,03	92,6
	C30-8-60	150	300	261	30	0,80	<i>hooked end</i>	80	1,03	92,2
C30-9-60	150	300	261	30	0,80	<i>hooked end</i>	80	1,03	88,2	
DANCYGIER e SAVIR (2006)	H5-F2- 1_35	200	300	273	129	0,75	<i>hooked end</i>	64	0,28	35,6
	H5-F2- 1_60	200	300	273	124	0,75	<i>hooked end</i>	67	0,28	41,0
	H8-F2- 1_35	200	300	273	124	0,75	<i>hooked end</i>	64	0,56	58,3
	H8-F2- 1_60	200	300	273	122	0,75	<i>hooked end</i>	67	0,56	55,8
	H5-F2- 1_35_3	200	300	273	122	0,75	<i>hooked end</i>	64	0,28	35,1
	H5-F2- 1_35_4	200	300	273	122	0,75	<i>hooked end</i>	64	0,28	33,8

Tabela B.1.1 - Banco de dados (BD) (Continuação).

Autor	Vigas	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$V_f$ (%)	Tipo de fibra	$l_f/d_f$	$\rho$ (%)	$M_{exp.}$ (kN.m)
COLAJANNI <i>et al.</i> (2008)	H5-F2-1_35	150	250	219	75	1,00	<i>hooked end</i>	55	1,91	78,8
	H5-F2-1_60	150	250	219	75	1,00	<i>hooked end</i>	55	1,91	78,8
	H8-F2-1_35	150	250	219	75	1,00	<i>hooked end</i>	55	1,91	78,2
	H8-F2-1_60	150	250	219	75	1,00	<i>hooked end</i>	55	1,91	78,2
MONTAIGNA C <i>et al.</i> (2011)	R150F/F60-1.0	400	150	- <sup>(1)</sup>	63	1,00	<i>hooked end</i>	80	0,00	11,7
	R150F/F35-1.0	400	150	- <sup>(1)</sup>	47	1,00	<i>hooked end</i>	64	0,00	10,0
	R300F/F60-1.0	400	300	- <sup>(1)</sup>	63	1,00	<i>hooked end</i>	80	0,00	33,9
	R300F/F35-1.0	400	300	- <sup>(1)</sup>	47	1,00	<i>hooked end</i>	64	0,00	24,9
	R600F/F60-0.75	500	600	- <sup>(1)</sup>	58	0,75	<i>hooked end</i>	80	0,00	139,7
	R600F/F60-1.0	500	600	- <sup>(1)</sup>	63	1,00	<i>hooked end</i>	80	0,00	142,3
	R600F/F35-1.0	500	600	- <sup>(1)</sup>	47	1,00	<i>hooked end</i>	64	0,00	153,9
	R600F/F35-1.25	500	600	- <sup>(1)</sup>	56	1,25	<i>hooked end</i>	64	0,00	163,6
	R150RF/F60-1.0	400	150	120	63	1,00	<i>hooked end</i>	80	0,42	20,0
	R150RF/F35-1.0	400	150	120	47	1,00	<i>hooked end</i>	64	0,42	18,3
	R300RF/F60-1.0	400	300	250	63	1,00	<i>hooked end</i>	80	0,40	73,2
	R300RF/F35-1.0	400	300	250	47	1,00	<i>hooked end</i>	64	0,40	65,7
	R600RF/F60-0.75	500	600	540	58	0,75	<i>hooked end</i>	80	0,37	332,8
	R600RF/F60-1.0	500	600	540	63	1,00	<i>hooked end</i>	80	0,37	334,6
	R600RF/F35-1.0	500	600	540	47	1,00	<i>hooked end</i>	64	0,37	333,0
	R600RF/F35-1.25	500	600	540	56	1,25	<i>hooked end</i>	64	0,37	351,5
LIMA (2012)	6	150	225	205	63	0,50	<i>hooked end</i>	80	0,49	19,3
	7	150	225	205	63	0,50	<i>hooked end</i>	80	0,28	11,8
	10	150	225	205	63	0,25	<i>hooked end</i>	80	0,28	9,6
	13	150	225	205	63	0,76	<i>hooked end</i>	80	0,28	11,0
MEDA <i>et al.</i> (2012)	2 $\phi$ 16 B-30	200	300	260	45	0,38	<i>hooked end</i>	50	0,77	57,6
	2 $\phi$ 16 B-60	200	300	260	43	0,76	<i>hooked end</i>	50	0,77	57,6
	4 $\phi$ 16 B-30	200	300	260	45	0,38	<i>hooked end</i>	50	1,55	105,0

<sup>(1)</sup> – Sem armadura de flexão.

Tabela B.1.1 - Banco de dados (BD) (Continuação).

Autor	Vigas	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$V_f$ (%)	Tipo de fibra	$l_f/d_f$	$\rho$ (%)	$M_{exp.}$ (kN.m)
MEDA <i>et al.</i> (2012)	2 $\phi$ 16 UB-30	200	300	260	45	0,38	<i>hooked end</i>	50	0,77	56,4
KANG <i>et al.</i> (2012)	FHC-65-1.5	125	250	210	64	0,50	<i>hooked end</i>	67	1,50	45,7
	FHC-100-1.5	125	250	210	69	0,75	<i>hooked end</i>	67	1,50	48,9
	FNC-65-1	125	250	210	31	0,50	<i>hooked end</i>	67	1,00	37,1
	FNC-100-1	125	250	210	33	0,75	<i>hooked end</i>	67	1,00	37,3
	FNC-65-1.5	125	250	210	31	0,50	<i>hooked end</i>	67	1,50	41,9
	FNC-100-1.5	125	250	210	33	0,75	<i>hooked end</i>	67	1,50	43,1
CONFORTI <i>et al.</i> (2013)	W750 FRC25-1	750	250	210	38	0,32	<i>hooked end</i>	63	1,02	187,0
	W750 FRC25-2	750	250	210	38	0,32	<i>hooked end</i>	63	1,02	195,0
	W750 FRC35-1	750	250	210	37	0,45	<i>hooked end</i>	63	1,02	189,0
	W750 FRC35-2	750	250	210	37	0,45	<i>hooked end</i>	63	1,02	194,0
	W1000 FRC25-1	1000	250	210	38	0,32	<i>hooked end</i>	63	1,05	262,0
	W1000 FRC25-2	1000	250	210	38	0,32	<i>hooked end</i>	63	1,05	257,0
	W1000 FRC35-1	1000	250	210	37	0,45	<i>hooked end</i>	63	1,05	257,0
	W1000 FRC35-1	1000	250	210	37	0,45	<i>hooked end</i>	63	1,05	272,0
KHALIL e TAYFUR (2013)	D250V0,5 H	150	250	210	140	0,50	<i>hooked end</i>	50	0,72	25,2
	D250V0,5 C	150	250	210	144	0,50	<i>crimped</i>	50	0,72	24,6
	D250V0,7 5H	150	250	210	141	0,75	<i>hooked end</i>	50	0,72	27,6
	D250V0,7 5C	150	250	210	143	0,75	<i>crimped</i>	50	0,72	25,8
	D250V1H	150	250	210	146	1,00	<i>hooked end</i>	50	0,72	29,1
	D250V1C	150	250	210	149	1,00	<i>crimped</i>	50	0,72	30,0
BELLO (2014)	1 $\phi$ 10	180	250	235	35	1,00	<i>hooked end</i>	55	0,19	13,1
	1 $\phi$ 12	180	250	235	41	1,00	<i>hooked end</i>	55	0,27	14,9
	1 $\phi$ 14	180	250	235	31	1,00	<i>hooked end</i>	55	0,36	19,3
	1 $\phi$ 16	180	250	235	42	1,00	<i>hooked end</i>	55	0,48	24,4
	2 $\phi$ 14	180	250	235	30	1,00	<i>hooked end</i>	55	0,73	32,9
	2 $\phi$ 16	180	250	235	44	1,00	<i>hooked end</i>	55	0,95	43,2
	3 $\phi$ 16	180	250	235	32	1,00	<i>hooked end</i>	55	1,43	57,7

Tabela B.1.1 - Banco de dados (BD) (Continuação).

Autor	Vigas	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$d$ (mm)	$f_c$ (MPa)	$V_f$ (%)	Tipo de fibra	$l_f/d_f$	$\rho$ (%)	$M_{exp.}$ (kN.m)
BELLO (2014)	3 $\phi$ 18	180	250	235	25	1,00	<i>hooked end</i>	55	1,80	68,1
	4 $\phi$ 16	180	250	235	32	1,00	<i>hooked end</i>	55	1,90	70,1
	3 $\phi$ 20	180	250	235	22	1,00	<i>hooked end</i>	55	2,23	75,7
SAHOO e SHARMA (2014)	M20-F-0.5	150	300	261	19	0,50	<i>hooked end</i>	80	0,87	56,5
	M20F-1.0	150	300	261	22	1,00	<i>hooked end</i>	80	0,87	57,6
	M20-F-1.5	150	300	261	22	1,50	<i>hooked end</i>	80	0,87	56,6
	M20F-0.5	150	300	261	29	0,50	<i>hooked end</i>	80	1,16	85,8
	M20-F-1.0	150	300	261	28	1,00	<i>hooked end</i>	80	1,16	88,4
	M20F-1.5	150	300	261	27	1,50	<i>hooked end</i>	80	1,16	85,9